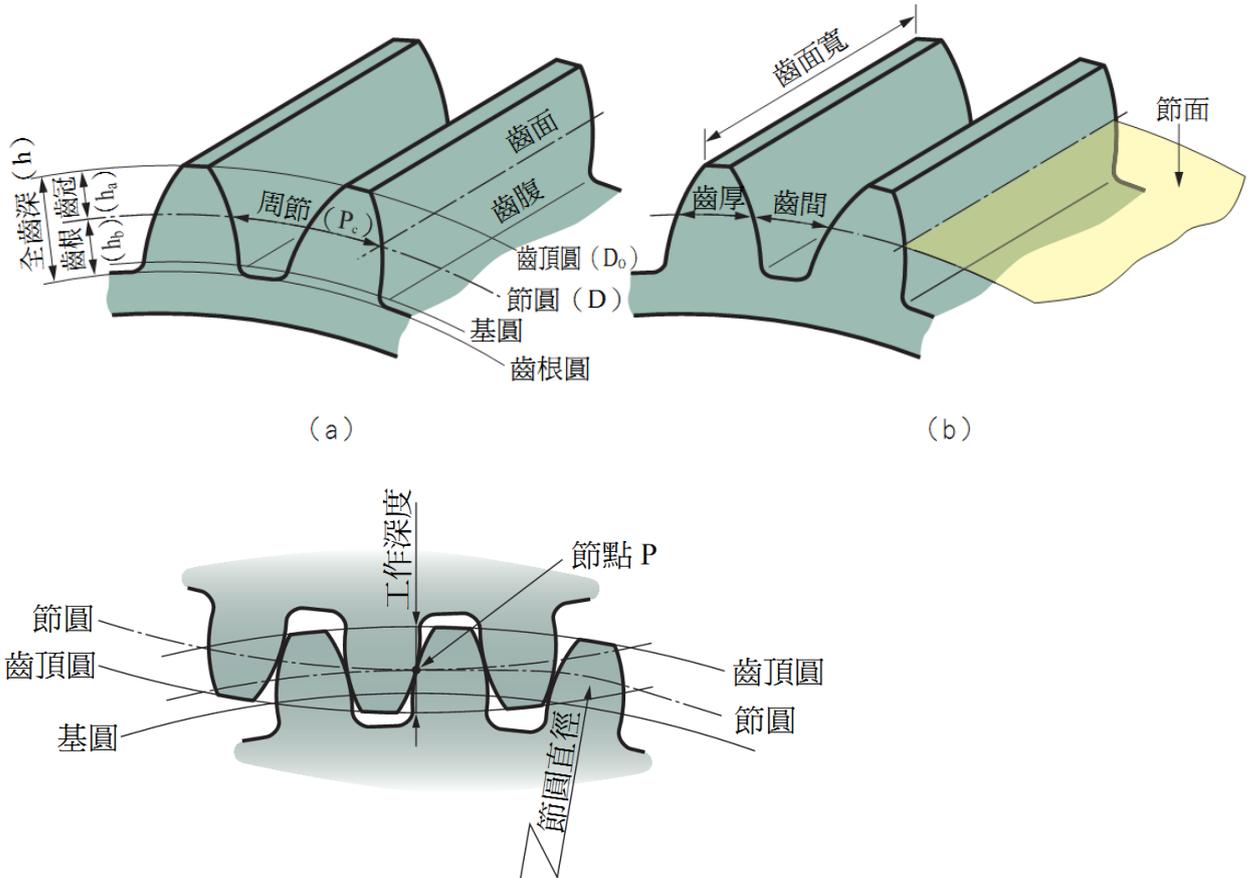


正齒輪跨齒厚公式推導

施先生詢問，謝孟萍、張世杰試圖解答

符號及術語

- [1]齒厚、齒間、基圓、節圓、節點、周節的意思見下圖。

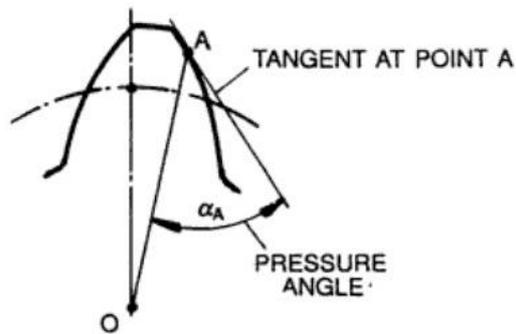


各名詞的英文：齒厚(tooth thickness)，基圓(base circle)，節圓(pitch circle)，節點(pitch point)，周節(circular pitch)。

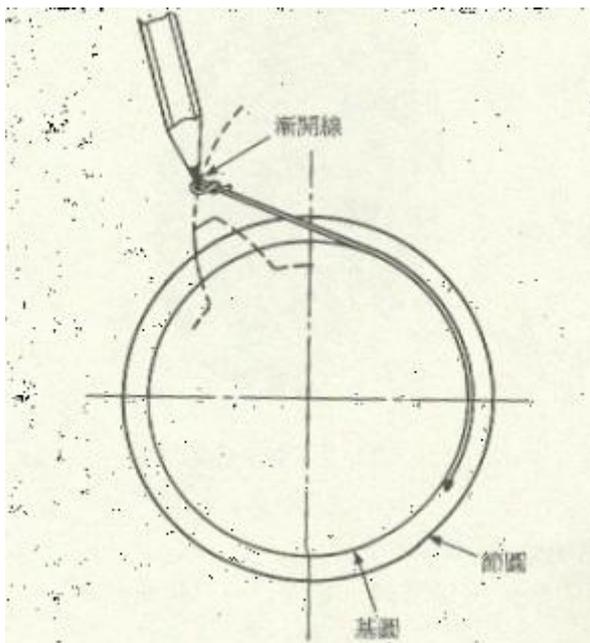
- 我們不打算對上面幾個名詞作嚴格的定義[2]，因為有點複雜，不妨直觀來看就好。節點就是兩相接合的齒輪的接觸點（這還不確定）。而節圓就是以齒輪圓心到節點的距離為半徑，並以齒輪圓心為圓心所作的圓。周節就是節圓上，一齒上任一點到下一齒對應點的弧長。注意，上圖中的齒厚是落在節圓上，但我們有時候也會用到在基圓上的齒厚。
- 類似於周節，我們也在基圓上定義**基節(base pitch)**，也就是基圓上，一齒上任一點到下一齒對應點的弧長。
- **模數(module)**定義為

$$\text{模數} = \frac{\text{節圓直徑}}{\text{總齒數}}$$

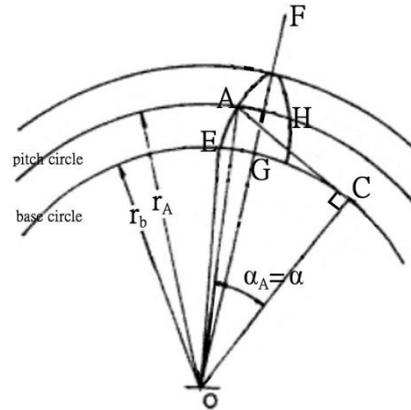
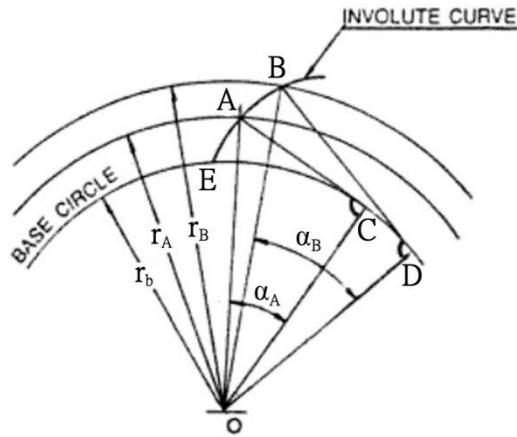
- [2]齒上點 A 的壓力角(**pressure angle**)如下圖 α_A ，就是點 A 與齒輪圓心的連線與過點 A 的切線的夾角。如果沒有特別說明哪一個點的壓力角，那麼就是指節點的壓力角，一個齒輪的壓力角就是指節點的壓力角，下文以 α 表示齒輪的壓力角。



- 漸開線(**involute curve**)的意思如下圖，也就是在基圓上選定任意一個點，將一細線固定在此點上，並將此線貼於基圓上，在此線的另一端繫上鉛筆，然後由鉛筆端逐漸地將此線轉離開基圓，此時畫出的弧即為漸開線。注意到，漸開線的前面部分即為齒輪剖面圖的側邊。



- 漸開線與壓力角：如下左圖，弧 \widehat{EAB} 就是漸開線，就是齒輪剖面圖齒上的側邊，對照下面右圖。注意到下面左圖中，畫漸開線的細線不一定固定在 D 點。 C 點是畫漸開線由 E 畫到 A 時，細線與基圓所接觸的最末端的那個點，也就是 \overline{AC} 是基圓在 C 點的切線，所以 $\overline{AC} \perp \overline{OC}$ 。類似地， D 點是畫漸開線由 E 畫到 B 時，細線與基圓所接觸的最末端的那個點，也就是 \overline{BD} 是基圓在 D 點的切線，所以 $\overline{BD} \perp \overline{OD}$ 。



一些預備公式

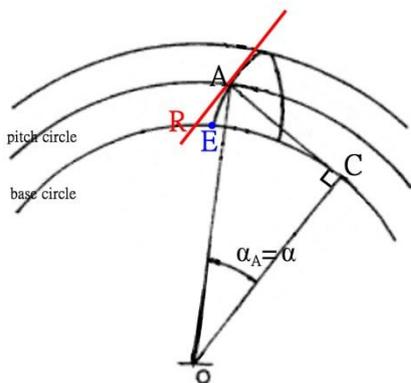
- [1]節圓上的齒厚等於節圓上的齒間，所以

$$\text{節圓上的齒厚} = \text{節圓上的齒間} = \frac{\text{周節}}{2}$$

- 周節的長度：

$$\text{周節} = \frac{\text{節圓周長}}{\text{總齒數}}$$

- [2]基圓直徑與節圓直徑的關係：當畫漸開線畫到齒上的節點 A 時，使用的細線與基圓相切於 C 時，如下圖，



此時 $\angle ACO = 90^\circ$ ，作漸開線 \widehat{EA} 上過點 A 的切線 \overline{RA} ，於是 $\angle RAC = 90^\circ$ ，所以 \overline{RA} 平行於 \overline{OC} ，於是

$$A \text{ 的壓力角} = \angle RAO \stackrel{\text{內錯角}}{=} \angle AOC = \alpha_A$$

又因為 A 是節點，所以齒輪的壓力角 $\alpha = A$ 的壓力角 $= \alpha_A$ 。容易知道，

$$\text{基圓半徑} = \overline{OC} = \cos \alpha_A \cdot \overline{OA} = \cos \alpha \cdot \overline{OA} = \cos \alpha \cdot \text{節圓半徑}$$

兩邊同乘以 2，得到

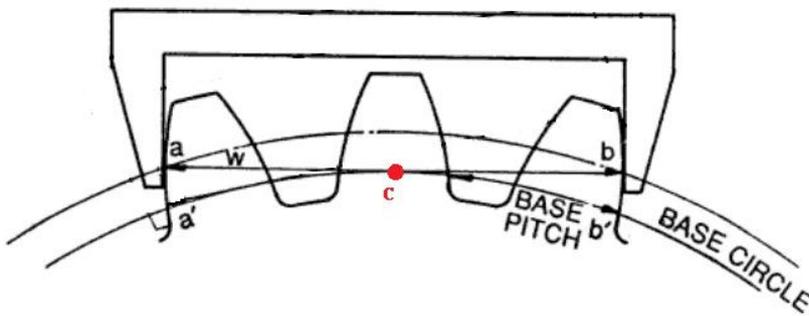
$$\text{基圓直徑} = \cos \alpha \cdot \text{節圓直徑}$$

- 基節：

$$\begin{aligned} \text{基節} &= \frac{\text{基圓周長}}{\text{總齒數}} = \frac{\pi \cdot \text{基圓直徑}}{\text{總齒數}} = \frac{\pi \cdot \cos \alpha \cdot \text{節圓直徑}}{\text{總齒數}} = \frac{\pi \cdot \text{節圓直徑}}{\text{總齒數}} \cdot \cos \alpha = \\ &= \pi \cdot \frac{\text{節圓直徑}}{\text{總齒數}} \cdot \cos \alpha = \pi \cdot \text{模數} \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

正齒輪跨齒厚公式

- 現在萬事俱備，只欠東風了。先來看跨 3 個齒的厚度，也就是下圖的 $w = \widehat{ab}$ 。不妨固定 c 點，向左右畫漸開線，所以 $\widehat{cb'} = \widehat{cb}$ ， $\widehat{ca'} = \widehat{ca}$ ，且 $w = \widehat{ab} = \widehat{a'b'}$ 。



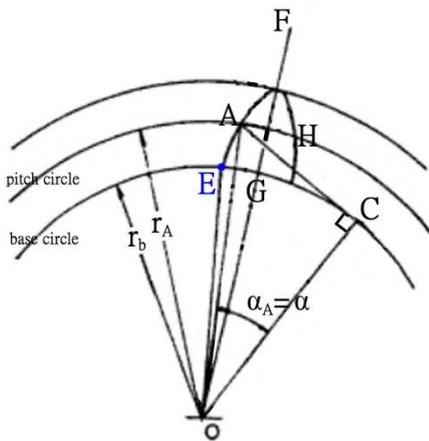
而容易知道，

$$\widehat{a'b'} = 2 \cdot \text{基節} + \text{基圓上的齒厚}$$

所以我們要量跨 n 個齒的跨齒厚，就是

$$\text{跨 } n \text{ 個齒的跨齒厚} = (n - 1) \cdot \text{基節} + \text{基圓上的齒厚}$$

- 我們需要一系列的推論。一樣地，畫漸開線畫到齒上的節點 A 時，使用的細線與基圓相切於 C ，並作齒平分線 \overline{OF} ，如下圖。



$$\text{基圓上半齒厚} = \widehat{EG} = r_b \cdot \angle EOF$$

另一方面

$$\angle EOC = \frac{\widehat{CE}}{r_b} \stackrel{\text{漸開線由 } E \text{ 到 } A}{=} \frac{\overline{CA}}{r_b} = \frac{\overline{CA}}{\overline{OC}} = \tan \alpha$$

於是

$$\begin{aligned} \text{節圓上半齒厚} &= \frac{\widehat{AH}}{2} = \text{節圓半徑} \cdot \angle AOF \\ &= r_A \cdot (\angle EOF - \angle EOA) \\ &= r_A \cdot [\angle EOF - (\angle EOC - \alpha)] \\ &= r_A \cdot [\angle EOF - (\tan \alpha - \alpha)] \end{aligned}$$

整理一下，得到

$$\angle EOF = \frac{\text{節圓上半齒厚}}{r_A} + (\tan \alpha - \alpha)$$

代入上面的基圓上半齒厚公式，得到

$$\begin{aligned} \text{基圓上半齒厚} &= r_b \cdot \angle EOF = r_b \cdot \left[\frac{\text{節圓上半齒厚}}{r_A} + (\tan \alpha - \alpha) \right] \\ &= \text{基圓半徑} \cdot \left[\frac{\text{節圓上半齒厚}}{\text{節圓半徑}} + (\tan \alpha - \alpha) \right] \end{aligned}$$

兩邊同乘以 2

$$\begin{aligned} \text{基圓上的齒厚} &= \text{基圓直徑} \cdot \left[\frac{\text{節圓上半齒厚}}{\text{節圓半徑}} + (\tan \alpha - \alpha) \right] \\ &= \text{基圓直徑} \cdot \left[\frac{2 \cdot \text{節圓上半齒厚}}{2 \cdot \text{節圓半徑}} + (\tan \alpha - \alpha) \right] \\ &= \text{基圓直徑} \cdot \left[\frac{\text{節圓上的齒厚}}{\text{節圓直徑}} + (\tan \alpha - \alpha) \right] \\ &= \text{基圓直徑} \cdot \left[\frac{\frac{\text{周節}}{2}}{\text{節圓直徑}} + (\tan \alpha - \alpha) \right] \\ &= \text{基圓直徑} \cdot \left[\frac{\text{周節}}{2 \cdot \text{節圓直徑}} + (\tan \alpha - \alpha) \right] \\ &= \text{基圓直徑} \cdot \left[\frac{\frac{\text{節圓周長}}{\text{總齒數}}}{2 \cdot \text{節圓直徑}} + (\tan \alpha - \alpha) \right] \\ &= \text{基圓直徑} \cdot \left[\frac{\frac{\text{節圓直徑} \cdot \pi}{\text{總齒數}}}{2 \cdot \text{節圓直徑}} + (\tan \alpha - \alpha) \right] \\ &= \text{基圓直徑} \cdot \left[\frac{\pi}{2 \cdot \text{總齒數}} + (\tan \alpha - \alpha) \right] \\ &= \cos \alpha \cdot \text{節圓直徑} \cdot \left[\frac{\pi}{2 \cdot \text{總齒數}} + (\tan \alpha - \alpha) \right] \\ &= \cos \alpha \cdot \text{模數} \cdot \text{總齒數} \cdot \left[\frac{\pi}{2 \cdot \text{總齒數}} + (\tan \alpha - \alpha) \right] \end{aligned}$$

最後，

跨 n 個齒的跨齒厚 = $(n - 1) \cdot$ 基節 + 基圓上的齒厚

$$\begin{aligned} &= (n - 1) \cdot (\pi \cdot \text{模數} \cdot \cos \alpha) + \cos \alpha \cdot \text{模數} \cdot \text{總齒數} \cdot \left[\frac{\pi}{2 \cdot \text{總齒數}} + (\tan \alpha - \alpha) \right] \\ &= n \cdot \pi \cdot \text{模數} \cdot \cos \alpha - \pi \cdot \text{模數} \cdot \cos \alpha + \frac{\pi \cdot \text{模數} \cdot \cos \alpha}{2} + \cos \alpha \cdot \text{模數} \cdot \text{總齒數} \cdot (\tan \alpha - \alpha) \\ &= n \cdot \pi \cdot \text{模數} \cdot \cos \alpha - 0.5 \cdot \pi \cdot \text{模數} \cdot \cos \alpha + \cos \alpha \cdot \text{模數} \cdot \text{總齒數} \cdot (\tan \alpha - \alpha) \\ &= (n - 0.5) \cdot \pi \cdot \text{模數} \cdot \cos \alpha + \cos \alpha \cdot \text{模數} \cdot \text{總齒數} \cdot (\tan \alpha - \alpha) \\ &= \text{模數} \cdot \cos \alpha [(n - 0.5) \cdot \pi + \text{總齒數} \cdot (\tan \alpha - \alpha)] \end{aligned}$$

施先生的算式中，總齒數為 117，模數為 3，壓力角 $\alpha = 20^\circ \approx 0.34906585039$ ，在正齒輪上，欲求跨 14 齒的跨齒厚，代入公式得到

$$\begin{aligned} &3 \times 0.93969262078 \times (3.14159265359 \times (14 - 0.5) + 117 \times (0.36397023426 - 0.34906585039)) \\ &= 124.477267459 \end{aligned}$$

The image shows a Google search interface. The search bar contains the formula: $3 \times 0.93969262078 \times (3.14159265359 \times (14 - 0.5) + 117 \times (0.36397023426 - 0.34906585039))$. Below the search bar, there are navigation links for '網頁', '地圖', '圖片', '新聞', '影片', '更多', and '搜尋工具'. The search results show '約有 0 項結果 (搜尋時間: 0.21 秒)'. A calculator interface is displayed, showing the same formula and the result '124.477267459'. The calculator interface includes buttons for 'Rad', 'Inv', 'π', 'e', 'Ans', 'sin', 'cos', 'tan', 'EXP', 'ln', 'log', '√', 'x^y', '7', '8', '9', '4', '5', '6', '1', '2', '3', '0', '.', '=', and '+'. There is also a '詳細內容' link below the calculator.

參考文獻

- [1]. http://www.pmai.tnc.edu.tw/df_ufiles/df_pics/32710%E7%AC%AC10%E7%AB%A0.pdf
- [2]. Maitra, Gitin M. *Handbook of gear design*. Tata McGraw-Hill Education, 1994.