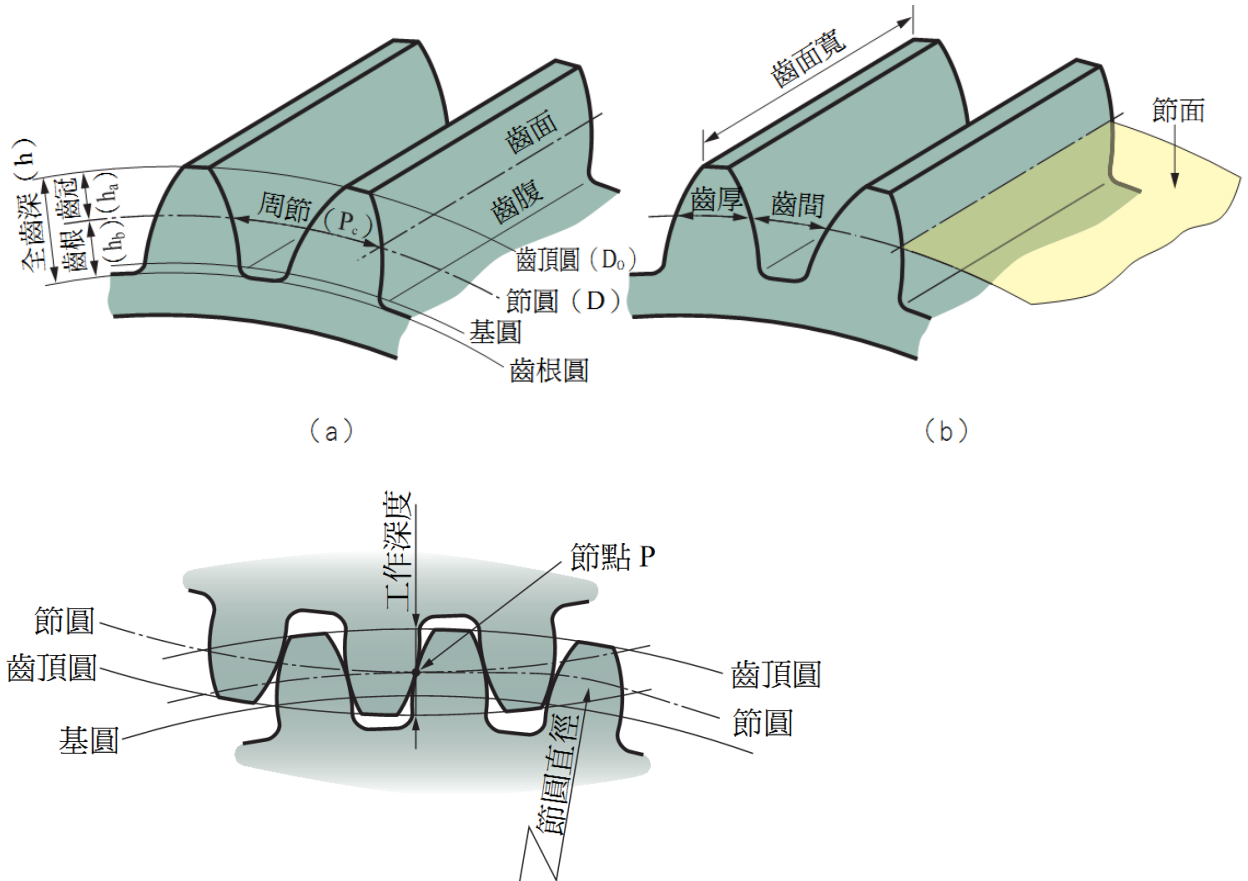


正齒輪跨齒厚公式推導

施先生詢問，謝孟萍、張世杰試圖解答

符號及術語

- [1]齒厚、齒間、基圓、節圓、節點、周節的意思見下圖。

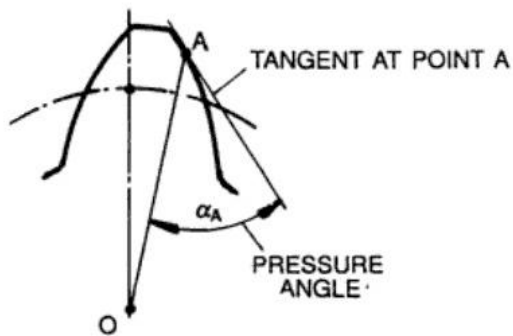


各名詞的英文：齒厚(tooth thickness)，基圓(base circle)，節圓(pitch circle)，節點(pitch point)，周節(circular pitch)。

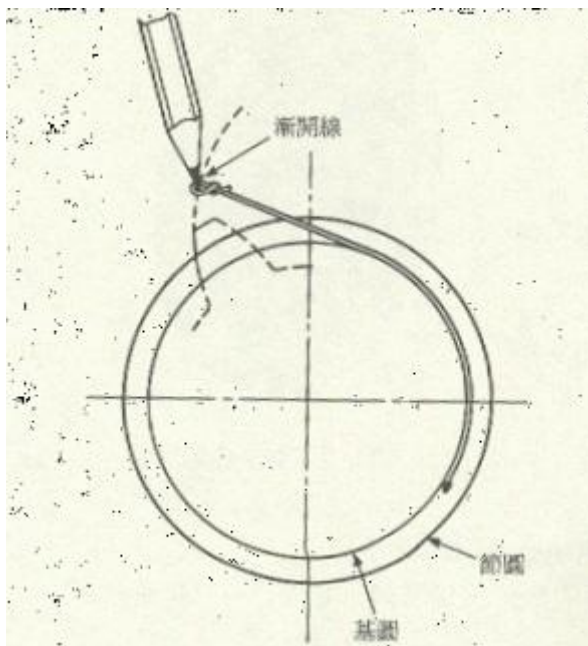
- 我們不打算對上面幾個名詞作嚴格的定義[2]，因為有點複雜，不妨直觀來看就好。節點就是兩相接合的齒輪的接觸點（這還不確定）。而節圓就是以齒輪圓心到節點的距離為半徑，並以齒輪圓心為圓心所作的圓。周節就是節圓上，一齒上任一點到下一齒對應點的弧長。注意，上圖中的齒厚是落在節圓上，但我們有時候也會用到在基圓上的齒厚。
- 類似於周節，我們也在基圓上定義**基節(base pitch)**，也就是基圓上，一齒上任一點到下一齒對應點的弧長。
- **模數(module)**定義為

$$\text{模數} = \frac{\text{節圓直徑}}{\text{總齒數}}$$

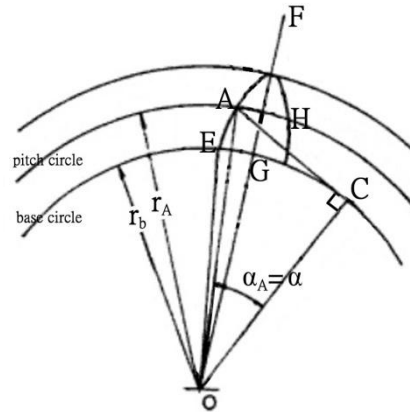
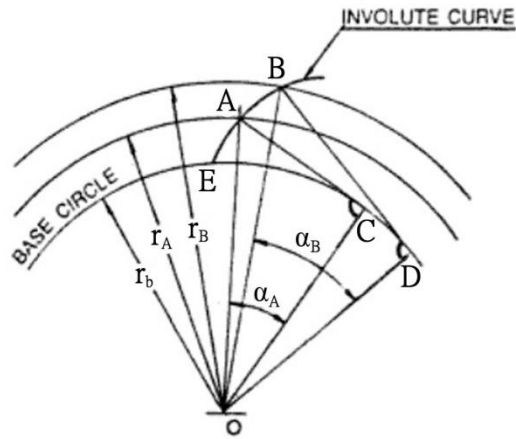
- [2]齒上點 A 的壓力角(**pressure angle**)如下圖 α_A ，就是點 A 與齒輪圓心的連線與過點 A 的切線的夾角。如果沒有特別說明哪一個點的壓力角，那麼就是指節點的壓力角，一個齒輪的壓力角就是指節點的壓力角，下文以 α 表示齒輪的壓力角。



- 漸開線(**involute curve**)的意思如下圖，也就是在基圓上選定任意一個點，將一細線固定在此點上，並將此線貼於基圓上，在此線的另一端繫上鉛筆，然後由鉛筆端逐漸地將此線轉離開基圓，此時畫出的弧即為漸開線。注意到，漸開線的前面部分即為齒輪剖面圖的側邊。



- 漸開線與壓力角：如下左圖，弧 \widehat{EAB} 就是漸開線，就是齒輪剖面圖齒上的側邊，對照下面右圖。注意到下面左圖中，畫漸開線的細線不一定固定在 D 點。 C 點是畫漸開線由 E 畫到 A 時，細線與基圓所接觸的最末端的那個點，也就是 \overline{AC} 是基圓在 C 點的切線，所以 $\overline{AC} \perp \overline{OC}$ 。類似地， D 點是畫漸開線由 E 畫到 B 時，細線與基圓所接觸的最末端的那個點，也就是 \overline{BD} 是基圓在 D 點的切線，所以 $\overline{BD} \perp \overline{OD}$ 。



一些預備公式

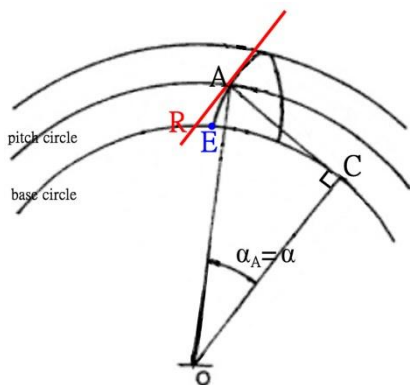
- [1]節圓上的齒厚等於節圓上的齒間，所以

$$\text{節圓上的齒厚} = \text{節圓上的齒間} = \frac{\text{周節}}{2}$$

- 周節的長度：

$$\text{周節} = \frac{\text{節圓周長}}{\text{總齒數}}$$

- [2]基圓直徑與節圓直徑的關係：當畫漸開線畫到齒上的節點 A 時，使用的細線與基圓相切於 C 時，如下圖，



此時 $\angle ACO = 90^\circ$ ，作漸開線 \widehat{EA} 上過點 A 的切線 \overline{RA} ，於是 $\angle RAC = 90^\circ$ ，所以 \overline{RA} 平行於 \overline{OC} ，於是

$$A \text{ 的壓力角} = \angle RAO = \overset{\text{內錯角}}{\angle AOC} = \alpha_A$$

又因為 A 是節點，所以齒輪的壓力角 $\alpha = A$ 的壓力角 $= \alpha_A$ 。容易知道，

$$\text{基圓半徑} = \overline{OC} = \cos \alpha_A \cdot \overline{OA} = \cos \alpha \cdot \overline{OA} = \cos \alpha \cdot \text{節圓半徑}$$

兩邊同乘以 2，得到

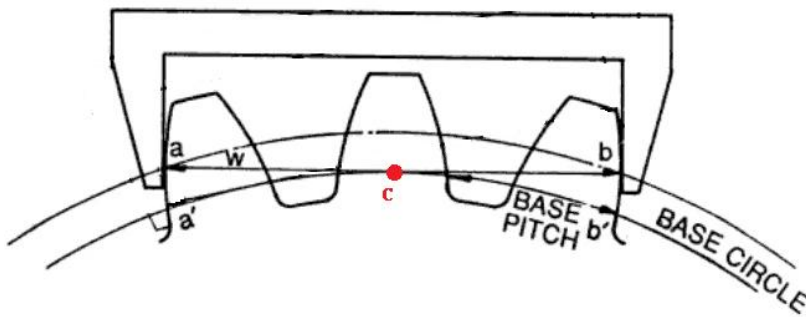
$$\text{基圓直徑} = \cos \alpha \cdot \text{節圓直徑}$$

- 基節：

$$\begin{aligned} \text{基節} &= \frac{\text{基圓周長}}{\text{總齒數}} = \frac{\pi \cdot \text{基圓直徑}}{\text{總齒數}} = \frac{\pi \cdot \cos \alpha \cdot \text{節圓直徑}}{\text{總齒數}} = \frac{\pi \cdot \text{節圓直徑}}{\text{總齒數}} \cdot \cos \alpha = \\ &= \pi \cdot \frac{\text{節圓直徑}}{\text{總齒數}} \cdot \cos \alpha = \pi \cdot \text{模數} \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

正齒輪跨齒厚公式

- 現在萬事俱備，只欠東風了。先來看跨 3 個齒的厚度，也就是下圖的 $w = \widehat{ab}$ 。不妨固定 c 點，向左右畫漸開線，所以 $\widehat{cb'} = \widehat{cb}$ ， $\widehat{ca'} = \widehat{ca}$ ，且 $w = \widehat{ab} = \widehat{a'b'}$ 。



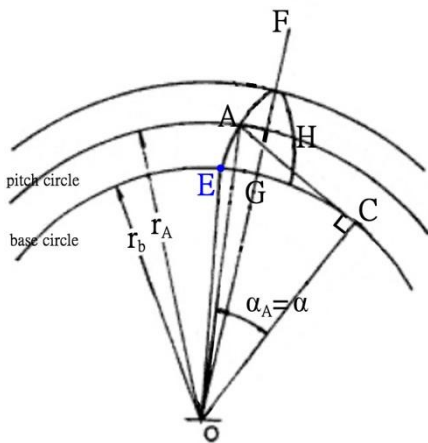
而容易知道，

$$\widehat{a'b'} = 2 \cdot \text{基節} + \text{基圓上的齒厚}$$

所以我們要量跨 n 個齒的跨齒厚，就是

$$\text{跨 } n \text{ 個齒的跨齒厚} = (n - 1) \cdot \text{基節} + \text{基圓上的齒厚}$$

- 我們需要一系列的推論。一樣地，畫漸開線畫到齒上的節點 A 時，使用的細線與基圓相切於 C ，並作齒平分線 \overline{OF} ，如下圖。



$$\text{基圓上半齒厚} = \widehat{EG} = r_b \cdot \angle EOF$$

另一方面

$$\angle EOC = \frac{\widehat{CE}}{r_b} \stackrel{\text{漸開線由 } E \text{ 到 } A}{=} \frac{\overline{CA}}{r_b} = \frac{\overline{CA}}{\overline{OC}} = \tan \alpha$$

於是

$$\begin{aligned} \text{節圓上半齒厚} &= \frac{\widehat{AH}}{2} = \text{節圓半徑} \cdot \angle AOF \\ &= r_A \cdot (\angle EOF - \angle EOA) \\ &= r_A \cdot [\angle EOF - (\angle EOC - \alpha)] \\ &= r_A \cdot [\angle EOF - (\tan \alpha - \alpha)] \end{aligned}$$

整理一下，得到

$$\angle EOF = \frac{\text{節圓上半齒厚}}{r_A} + (\tan \alpha - \alpha)$$

代入上面的基圓上半齒厚公式，得到

$$\begin{aligned} \text{基圓上半齒厚} &= r_b \cdot \angle EOF = r_b \cdot \left[\frac{\text{節圓上半齒厚}}{r_A} + (\tan \alpha - \alpha) \right] \\ &= \text{基圓半徑} \cdot \left[\frac{\text{節圓上半齒厚}}{\text{節圓半徑}} + (\tan \alpha - \alpha) \right] \end{aligned}$$

兩邊同乘以 2

$$\begin{aligned} \text{基圓上的齒厚} &= \text{基圓直徑} \cdot \left[\frac{\text{節圓上半齒厚}}{\text{節圓半徑}} + (\tan \alpha - \alpha) \right] \\ &= \text{基圓直徑} \cdot \left[\frac{2 \cdot \text{節圓上半齒厚}}{2 \cdot \text{節圓半徑}} + (\tan \alpha - \alpha) \right] \\ &= \text{基圓直徑} \cdot \left[\frac{\text{節圓上的齒厚}}{\text{節圓直徑}} + (\tan \alpha - \alpha) \right] \\ &= \text{基圓直徑} \cdot \left[\frac{\frac{\text{周節}}{2}}{\text{節圓直徑}} + (\tan \alpha - \alpha) \right] \\ &= \text{基圓直徑} \cdot \left[\frac{\text{周節}}{2 \cdot \text{節圓直徑}} + (\tan \alpha - \alpha) \right] \\ &= \text{基圓直徑} \cdot \left[\frac{\frac{\text{節圓周長}}{\text{總齒數}}}{2 \cdot \text{節圓直徑}} + (\tan \alpha - \alpha) \right] \\ &= \text{基圓直徑} \cdot \left[\frac{\frac{\text{節圓直徑} \cdot \pi}{\text{總齒數}}}{2 \cdot \text{節圓直徑}} + (\tan \alpha - \alpha) \right] \\ &= \text{基圓直徑} \cdot \left[\frac{\pi}{2 \cdot \text{總齒數}} + (\tan \alpha - \alpha) \right] \\ &= \cos \alpha \cdot \text{節圓直徑} \cdot \left[\frac{\pi}{2 \cdot \text{總齒數}} + (\tan \alpha - \alpha) \right] \\ &= \cos \alpha \cdot \text{模數} \cdot \text{總齒數} \cdot \left[\frac{\pi}{2 \cdot \text{總齒數}} + (\tan \alpha - \alpha) \right] \end{aligned}$$

最後，

跨 n 個齒的跨齒厚 = $(n - 1) \cdot$ 基節 + 基圓上的齒厚

$$\begin{aligned} &= (n - 1) \cdot (\pi \cdot \text{模數} \cdot \cos \alpha) + \cos \alpha \cdot \text{模數} \cdot \text{總齒數} \cdot \left[\frac{\pi}{2 \cdot \text{總齒數}} + (\tan \alpha - \alpha) \right] \\ &= n \cdot \pi \cdot \text{模數} \cdot \cos \alpha - \pi \cdot \text{模數} \cdot \cos \alpha + \frac{\pi \cdot \text{模數} \cdot \cos \alpha}{2} + \cos \alpha \cdot \text{模數} \cdot \text{總齒數} \cdot (\tan \alpha - \alpha) \\ &= n \cdot \pi \cdot \text{模數} \cdot \cos \alpha - 0.5 \cdot \pi \cdot \text{模數} \cdot \cos \alpha + \cos \alpha \cdot \text{模數} \cdot \text{總齒數} \cdot (\tan \alpha - \alpha) \\ &= (n - 0.5) \cdot \pi \cdot \text{模數} \cdot \cos \alpha + \cos \alpha \cdot \text{模數} \cdot \text{總齒數} \cdot (\tan \alpha - \alpha) \\ &= \text{模數} \cdot \cos \alpha [(n - 0.5) \cdot \pi + \text{總齒數} \cdot (\tan \alpha - \alpha)] \end{aligned}$$

施先生的算式中，總齒數為 117，模數為 3，壓力角 $\alpha = 20^\circ \approx 0.34906585039$ ，在正齒輪上，欲求跨 14 齒的跨齒厚，代入公式得到

$$\begin{aligned} &3 \times 0.93969262078 \times (3.14159265359 \times (14 - 0.5) + 117 \times (0.36397023426 - 0.34906585039)) \\ &= 124.477267459 \end{aligned}$$

The image shows a Google search interface. The search bar contains the formula: $3 \times 0.93969262078 \times (3.14159265359 \times (14 - 0.5) + 117 \times (0.36397023426 - 0.34906585039))$. Below the search bar, there are navigation links for '網頁', '地圖', '圖片', '新聞', '影片', '更多', and '搜尋工具'. The search results section shows '約有 0 項結果 (搜尋時間: 0.21 秒)'. A calculator interface is displayed, showing the same formula in the input field and the result '124.477267459' in the output field. The calculator interface includes various mathematical functions like Rad, Inv, sin, ln, 7, 8, 9, +, π, cos, log, 4, 5, 6, ×, e, tan, √, 1, 2, 3, -, Ans, EXP, x^y, 0, ., =, and +.

參考文獻

- [1]. http://www.pmai.tnc.edu.tw/df_ufiles/df_pics/32710%E7%AC%AC10%E7%AB%A0.pdf
- [2]. Maitra, Gitin M. *Handbook of gear design*. Tata McGraw-Hill Education, 1994.