

科學月刊叢書 ⑤

# 教授爲何教不好

莫理斯·克蘭因 著 方祖同 譯



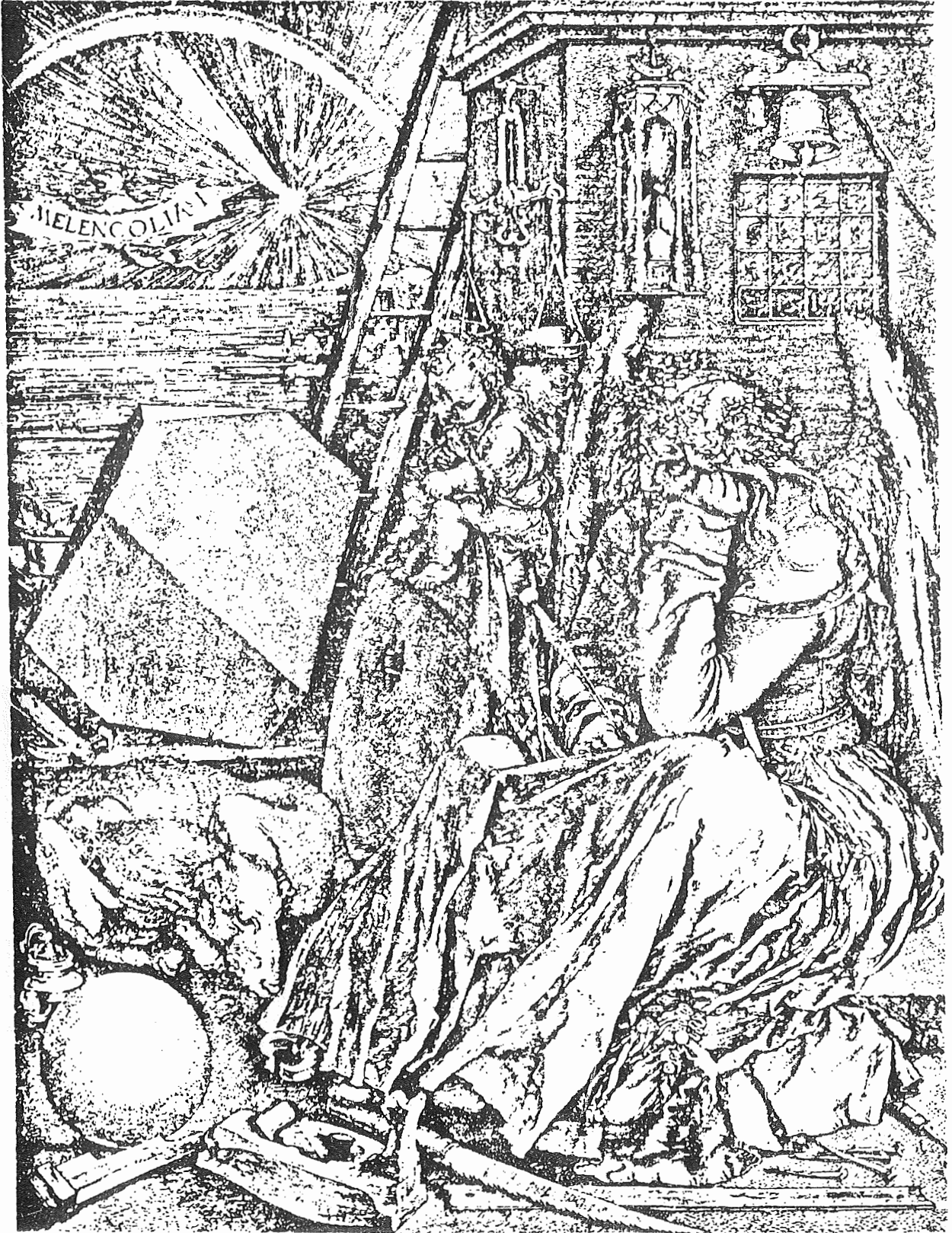
# 目 錄

原 序 .....	7
第一章 惡性循環 .....	11
第二章 美國數學教育的起源 .....	19
第三章 現時數學研究的性質 .....	35
第四章 研究與教學間的對立 .....	55
第五章 大學部學生教學的貶值 .....	73
第六章 偏狹的數學家 .....	83
第七章 純正的數學家 .....	101
第八章 方向錯誤的中學教育 .....	115
第九章 洞口初見光亮：小學教育 .....	129
第十章 荒唐的市場： 對教科書的聲討 .....	147
第十一章 義不容辭的一些改革 .....	165
附 錄：參考書目 .....	189

#### 4 教授爲何教不好

那一種精神更為高貴？是忍受命運殘酷地向你投擲石塊和箭矢，還是拿起武器對抗無窮煩惱，加以抗拒和制止？

莎士比亞 William Shakespeare



荷蘭畫家杜勒 ( Albrecht Durer ) 木版畫「憂鬱一世」。

# 原序

確有教授爲我深喜和尊敬，如若他們不爲惡習束縛，很能勝任教育年年…或在無法補救前，設法除去弊害。

盧梭 *Jean-Jacques Rousseau*

這是對文理學院教育提出指控的一本書。常有人提起各級教育的缺失，但我們為什麼要特別把焦點專注在大學部的教育呢？文理學院是美國整個教育系統的心臟，它們所教育的青年，成爲未來的領導人物或文化水準的保持者；它們讓學生有必備基礎與背景得以進一步研習法律、醫藥、牙醫、會計等專業知識；它們爲科學家和工程師準備基本的學術課程；它們教育中小學教師而影響到各級教育。文理學院雖未明說訓練學院的教師，但其中男女學生會照着在大學部接受的教育方式，從事將來的的工作。

本書注重大學的數學教育。但是，所檢討到的各點，有很多也適用於其他學科。經由與衆多同事商談，並參閱最近才發表的一些書刊，我更加肯定實情確屬如此。

縱使實情容或不盡然，數學教育亦非只是教讀、寫、算，三者之一的問題。數學不僅是文化長河的一條主要支流、科技文明的骨幹，以及財務和保險結構的基礎。此外，數學在社會科學、生物學和醫藥學方面的價值亦不容忽視。對學生來說，不問將來會不會經常用到這門知識，正常可靠的教學法極爲重要。數學的失敗，使得他們喪失自信，這種損害影響到對

整個教育的態度。

數學教育已經形成大災難。只要隨便問一位學院的畢業生，四分之三的三分之二是多少就知道了，假如碰巧他說出了正確答案，再追問一下，就會發現他顯得沒有把握。一般對這一學科的共同了解，就是認為它是無法了解的。根據他們在學校學習的經驗，成人對這一學科的反應是畏懼交織着蔑視，且通常以後者占的成分更多。甚至在其他方面受到良好教育的人，並不將數學看在眼下，以對其無知沾沾自得。

大學教育何以淪落到如此不堪的程度？過分強調研究似應列為罪魁禍首。大學重視研究立場，所據的理由是：研究工作不僅有助於知識的增進，並且對良好教學也極關重要。我認真地檢討這項主張發現研究工作和大學部教學正處於對立的立場。「不出版就完蛋」不只威脅教授，更實際的後果是「教師全神灌注在寫研究報告，學生當然會完蛋」。為爭取研究教授，大學必需以提高薪給、減少教學負擔，並給與研究專門科目的自由。由於經費有限，大學就採用歪着處理其他事務，尤以大學部的教育為然。

雖然，大學的政策是教育缺失的根源，教授只是接受這種政策，但教授也難辭其咎。他們有力量、對學生負有道義責任。而且大多數教授已獲得到終身教職，具有相當的獨立性，已無過分注重研究的必要。但面對誘惑時，教授却和常人一樣，例如研究有更好的薪給，發生回應，難怪會積極爭取研究工作，進而利用這種地位謀取物質利益—像從撰寫亂糟糟的教科書賺版稅等。大多數忽視教學法的教授，似乎心安理得毫無內疚之感，他們以教自己有興趣的課程為樂，相對地犧牲了學生的需要和興趣。由於中小學教師也修習這類課程，所以這種偏好對各級教育的品質產生了惡性循環。

沒有能治一切疑難雜症的萬應靈丹。但理性地分析一下我們大學教育的情況，或可理出一條有助於改進的坦途，而且只要現有可資運用的人力、設備和經費，就可以辦到。

在這裡所提出的客觀論點，雖然有本書附錄參考書目中的各種統計記錄來加強可信度，不過許多主張和意見還是屬於我個人的，所幸這些判斷

到底根據了個人將近五十年來在教學、研究和行政方面的經驗。這其中的大部份時期，我在大學部和研究所任教，而且有十一年出任某一主要大學大學部數學系主任。在研究方面，我在「高級研究所」任研究助理兩年，參加戰時研究三年，以及負責美國某一最著名研究所數學部門達二十年之久。我我曾應邀在很多學院和大學講演並在幾處擔任訪問教授，相信，我對上述這些學校、機構的情況有直接的了解。

對大學政策和實務的批評，並非少見。在美國，談論高等教育的書籍很多，如討論管理不善、教育缺乏績效、浪費、行政部門和教授團之間的隔閡等。不幸，這些作者似乎相信，要保持客觀，就必需輕描淡寫。他們舉出贊成和反對的論點，可是，一旦提出如何改革的意見，就不免含糊不清。使你覺得這些作者都很怕作出結論，或者未能把握住問題的癥結。如此兩面討好的作風，要歸咎於大學教師的膽怯，或者由於確實不曾認清重點。凜於良知，我們不應再繼續猶豫下去，更明確地說，碰到問題，不能再這樣輕描淡寫一下就算應付過去了。試想以百萬計的學生受過大學教育，他們若得到這種經驗，會嚴重影響他們的一生。誠然，在我們社會裡，大學有很多責任和任務，可是，教育文理學科學生是不容否定的基本項目。對這項首要功能，如抱模稜兩可的態度，無異是放棄職責。

我殷切希望本書能為各階層讀者效勞。若大學行政主管關心其組織成效，應即重行考慮大學的重點和政策。家長，其中許多人甚至犧牲一些生活必需的事物，以送子女進入學院，應注意其子女受到的待遇；大學的聲望並非健全教育方式的保證。立法人員分撥教育經費，應確知款項如何使用。

即使研究教授也不能置身事外。對數學生命的最大威脅來自數學家自己，其最有殺傷力的武器就是惡劣的數學法。數學作為文理學科教育的一科，可能即將消逝，正像希臘文和拉丁文已經消逝；或現代外國語文研習正逐漸消失一樣。

總之，大眾如果相信國民教育是有效率的民主政府最確實的保證，自己就應關懷關鍵性教育機構的運作。



本書原稿承William Magus教授(紐約工藝研究所)，George Booth教授(紐約市立大學，布魯克林學院)，Murray S. Klamkin教授(亞伯達大學)審閱並賜指教，謹此敬申謝意。他們樂於相助並不表示支持本書的內容。本書出版多虧Julie Garristt小姐周詳用心的編輯及其他遠超過其職責的貢獻。最後，應對內子Helen細讀原稿，提出批評以及準時校稿，深致感激之情。

莫理斯·克蘭因Morris Kline

1977年六月

# 第一章 惡性循環

在自我為中心的圓裏，一圈一圈旋繞，他真是神童；只有自我主義者才離不開圓周和中心。

費爾斯 *Sarah Fells*

彼得·藍德斯發覺自己陷入了惡性循環中。他剛從「享譽」大學得到主修數學的博士學位，經強力推薦在「可敬」大學擔任教職。現在所面對的問題是他講授的對象，包括未來的工程師、社會科學家、物理學家、中小學教師、一般文理學科學生，還有像他自己一樣希望成為數學家的學生。彼得充分了解各別科系的興趣重點不同，也知道每個學生進入學院的動機和準備各異，但自信他所接受的典型博士教育能勝任目前的這門教育工作。

他藉反省自己接受教育的經過，以建立正確心態。小學課程大致不錯。有如曉得一塊糖的價錢，總會知道五塊糖應付多少。當然，也有一些演算令人迷惑。例如，兩個分數相除為什麼要將除數的分子分母顛倒過來再和被除數相乘，就弄不大清楚，似乎只有老師才知道什麼是對的。他經常說，這是規則、原理和定律。正像行為的規則一樣，算術也用到一些規則。至於原理就更像校長所訂的法則，最具權威性。談到定律，誰都知道有地方性法律、州訂的法律、全國性法律、甚至像十誡裡的誡律，全都必需服從。爲了是否違犯定律，彼得雖然感到有些緊張，但他是活潑愉快的。

無論如何，該做什麼都很清楚，而且答案也都確定。

檢討中學教育，彼得回想到某些疑問：所教的數學究竟有何價值；老師為何強調兩個整數之和為一整數；為何必需證明每一線段有而且只有一個中點。老師顯然確想使每個人不會誤解這些基本事實，畢竟老師最知道那些是該做的。彼得更記起一位老師熱愛二次式。在導出這一公式時，得意洋洋宣稱：「大家注意，我們現在能解答任何二次方程式。」可是，固執的彼得請問老師，為什麼每個人都需要解任何二次方程式。老師的答覆是令彼得感到畏縮的輕蔑眼光。顯然，自己所提的問題一定是愚蠢的。

他又回憶在學習幾何時，也有類似的經驗。經過冗長而費力的演證後，老師證明了：兩個三角形，如對應邊相等則兩個三角形全等。隨即面向學生，似乎期待大家鼓掌讚賞。彼得又大膽說出：「這是顯而易見的事，一個三角形是一個堅實形體，如用三根木棒做一個三角形自然無法改變其大小和形狀。」這是彼得在五歲玩組合玩具時就知道的。老師以明顯藐視的口吻回答說：「誰在談木棒？我們只關心三角形。」

雖然另外還有幾項令人不快的意外事件，彼得仍然喜愛數學，相信老師，並順從其要求，同時，老師所給的確定解答，使他以及其他學生感到很大滿足。因為深信自己喜愛數學，所以進入學院後選作主修學科。一開頭，稍為有點困擾，他將選課表送給指導老師。可是，這位老師並不知道「分班前測驗分數」4.5的意思，認為滿分應為10分，那4.5分不免嫌低。但後來還是核准了，彼得終於獲得註冊。

進入學院，第一堂課碰巧是英文。使他驚奇的是走進教室裡面，已經坐滿了五百名學生。教授上堂後，隨即講課，講完匆匆離開，顯然很忙碌。彼得從不知道他的大名。不過，名字實在不重要，因為教授也不在意，沒有問過任何一位學生的姓名。彼得想，就是每一次另換五百名學生，教授也不會注意到。學期報告一定要繳，但由研究生批給分數。這位研究生堅持「Who shall I Call next？」這個句子是對的，儘管它和彼得在中學裡所學的不一樣。彼得起先為班上人數太多以及感情冷漠的教學方式所困惑，不過，隨即發覺只憑聽講就能通過英文課程，也就大為開懷。

第二堂課是社會科學裡一門學科，由於另一種原因也使彼得感到驚奇。站在教授講臺位置的，是一位年輕人，比他大不了幾歲。這位講師授課時顯得很緊張，不歡迎提出問題。整個學期這門功課只教了課本最前的一部份。

第三堂課—數學—更使彼得大吃一驚。他走進一間大講堂，在大講堂最低處的教授講臺上，不是一個人是一個大盒子，實在是一座電視機。彼得進去後，隨即聽到這個盒子開始播講，所有的學生趕忙抄寫筆記。有很多座位即使能看到影像，也看不清楚。如若早點到講堂，自然可以找到好座位。彼得在學院裡，有幾門數學課程是很費勁的從聽和看電視節目學習的。

雖然不是必修課程，彼得也選修了幾門物理學科。他曾聽說過，數學可以應用到物理方面，因而想知道究竟應用到那些。物理教授時常談到無窮小，並說有些無窮小可以略而不計。可是，數學教授提出告誡，說這種概念和做法是不準確而且錯誤的。彼得深信數學和物理教授顯然由於未曾相互溝通，所以說法不同。但是，兩者所用的方法應能協調而取得一致。他很想找教授請教這一問題，不幸竟無法如願。一位教授實際不住在本市，家在美京華盛頓。另一位經常在大學之外擔任顧問工作，第三位在辦公室接見學生的時間只限於星期天上午六至八時。

到了三、四年級，班上人數較少，通常由資深老師授課。不過有許多教授完全不顧他們自己指定的課本，時間都花在把他筆記本上的資料抄到黑板上。教授不停的抄，學生同樣也不停的抄。教授從他的筆記本抬起頭來，只查看黑板，好像學生都在黑板後面。

雖說如此，彼得仍然孜孜不倦，終於獲得學士學位進入研究所。他在研究所的經過和大多數其他學生一樣，很難和教授接觸。「課程說明」裡所說的內容也和教授所教的沒有關聯。每位教授只講他專門研究的項目，一副旁若無人的樣子；而對於世界上其他人正在進行的事，也是一樣視若無睹。因此，彼得學到像範疇論、無限 Abel 群、同胚可微分、非交換環、以及其他各種專門科目。

博士候選人必需撰寫論文。找一位論文指導老師好像在荒漠裡覓甘泉。彼得的教授曾提示就某些題目寫論文，後來發覺這些題目不但早有人寫過，並且業已出版。歷經多次試探，他終於就「殆完善數」這個題目寫了一篇，取得博士學位。

有了博士資格，彼得自覺在學院教書已有準備。在接受「可敬」大學的教職後，系主任提供他所教幾門課程的綱要，告訴他各門課程所用的教科書。興高采烈但也很夠風度的彼得，熱忱的進行自己的職務。他始終很喜歡數學，確信自己能將對這項學科的熱誠和了解帶給他的學生。系主任也告訴他要獲得晉升和永久教職就得做研究工作。這項要求並未減低彼得的銳氣，因為耳濡目染，他知道數學家總得做研究，並且深信他曾受的訓練足以勝任研究工作。

可是，事情隨即開始逼到彼得頭上。作為新進人員，彼得教的是大學部一、二年級學生。第一門課程教的是文理學科學生。這些學生不會專門或時常用到數學，他們選修這一門課程是爲了符合取得學位的條件，或者也想對這一學科多瞭解一點。彼得發覺許多學生代數程度很差，因此想先複習一下負數。在說明負數的意義時，他提醒學生負數可用來表示零下溫度，又爲了強調溫度爲負數的物理意義，還指出水的冰點在華氏32度，所以溫度爲負數低於冰點很多。就教學法而言，這個例子舉得很好。不過，彼得立即看出學生的注意力也跟着凍結了，直到上完這堂課他還不能將之解凍。

後來在教這一課程時，彼得談到另一項題目。由於他偏愛代數，想到學生或許喜歡學一點代數方面的新東西。有種算術是只管整數除以12所得的餘數。爲使講解具體起見，彼得就用時鐘來說明這種算術，作爲實際例證。計時要省略掉十二的倍數，所以十點鐘後四小時是兩點鐘。就因爲提到時鐘，使得學生都在看手錶，顯然在計算每一分鐘，直到下課爲止。

彼得又再設法談一個新題目，即孔尼斯堡橋的問題。約在兩百年前，東普魯士的孔尼斯堡居民，對依次走過附近七座橋，並不得通過任何橋兩次的問題，激起好奇的興趣。這一問題也引起十八世紀最偉大數學家尤拉

(Leonhard Euler)的注意。尤拉不久就用巧妙的方法說明，這條路線無法找到。可是，村民並不知道這項結果，多年來仍然在陽光普照的下午，從一條路線換到另一條路線走着玩。當彼得在燈光黯淡的教室裡提出這一問題時，全班忽然呈現一片冷漠。

彼得的另一班是準備修習工程的學生，確信他們會重視數學，就介紹布氏代數給他們。這是數學家及邏輯學家布爾(George Boole)創設的代數，業已應用到電路設計。由於提到電路，引起一些學生的興趣，所以彼得對布氏代數進行解說。後來有一位學生請問如何應用這一代數於設計電路，不幸由於彼得只受過純粹數學訓練，無法答覆這一問題。他不得不承認這一點，但立即覺察到學生明顯的失望和不滿，認為他們受騙了。在解說和闡釋其他數學題目過程中，彼得也發覺工程學生注重的，只是能用於製造實物的規則，對數學本身並無興趣。

準備修習醫科的學生也並不更傾心於數學。他們的態度是：醫生無需用到數學，只不過由於學物理課程要先修數學，不過，他們甚至對物理課程的價值也認為不無可疑。物理科學家和社會科學家抱持相同的態度，即數學只是工具。他們關心實在世界和實在的人，數學當然不是那實在界的一部份。

彼得後來被分到未來中小學教師班上任教。他對小學教師不抱太多希望，因為這些學生將來要教各門功課，自不會對數學有強烈興趣。但是，未來中學教師是教各別科目的，深望他們能重視他的講授。可是，每次介紹新題目後，學生提出的第一個問題就是，「我們將來要教這些嗎？」彼得不知道中學現在教些什麼，或者即將有改變的中學課程表，可能教的又是些什麼，只有老實回答說：「不」，或者「我不知道。」聽到這種答覆，這些未來的教師又退縮到甲壳裡去，彼得的講授祇好從無法穿透的甲壳表面反射回來。

彼得的一項希望，是想從主修數學的學生處獲得對他熱忱教學的回應。當然，這些學生重視他所提出的教材。不過，就是這些學生也似乎只想聽過就算。在他說明一項定理或證明時，他們全神貫注。在考試時也能照



(Leonhard Euler)的注意。尤拉不久就用巧妙的方法說明，這條路線無法找到。可是，村民並不知道這項結果，多年來仍然在陽光普照的下午，從一條路線換到另一條路線走着玩。當彼得在燈光黯淡的教室裡提出這一問題時，全班忽然呈現一片冷漠。

彼得的另一班是準備修習工程的學生，確信他們會重視數學，就介紹布氏代數給他們。這是數學家及邏輯學家布爾(George Boole)創設的代數，業已應用到電路設計。由於提到電路，引起一些學生的興趣，所以彼得對布氏代數進行解說。後來有一位學生請問如何應用這一代數於設計電路，不幸由於彼得只受過純粹數學訓練，無法答覆這一問題。他不得不承認這一點，但立即覺察到學生明顯的失望和不滿，認為他們受騙了。在解說和闡釋其他數學題目過程中，彼得也發覺工程學生注重的，只是能用於製造實物的規則，對數學本身並無興趣。

準備修習醫科的學生也並不更傾心於數學。他們的態度是：醫生無需用到數學，只不過由於學物理課程要先修數學，不過，他們甚至對物理課程的價值也認為不無可疑。物理科學家和社會科學家抱持相同的態度，即數學只是工具。他們關心實在世界和實在的人，數學當然不是那實在界的一部份。

彼得後來被分到未來中小學教師班上任教。他對小學教師不抱太多希望，因為這些學生將來要教各門功課，自不會對數學有強烈興趣。但是，未來中學教師是教各別科目的，深望他們能重視他的講授。可是，每次介紹新題目後，學生提出的第一個問題就是，「我們將來要教這些嗎？」彼得不知道中學現在教些什麼，或者即將有改變的中學課程表，可能教的又是些什麼，只有老實回答說：「不」，或者「我不知道。」聽到這種答覆，這些未來的教師又退縮到甲殼裡去，彼得的講授祇好從無法穿透的甲殼表面反射回來。

彼得的一項希望，是想從主修數學的學生處獲得對他熱忱教學的回應。當然，這些學生重視他所提出的教材。不過，就是這些學生也似乎只想聽過就算。在他說明一項定理或證明時，他們全神貫注。在考試時也能照



樣寫出來。但在討論到這一定理為何有用，或者這一證明方法比另一方法為何更成功或更好，他們就覺得厭煩。

經過幾年勞而無功的努力之後，彼得靜坐沉思。他想將自己和自己的價值觀投射出去，但遭受失敗。文理學科學生看不出數學的價值。主修數學的學生修習數學，像彼得那時一樣，只因為對問題能獲得確定答案而高興，對數學本身並無真正興趣。至於在職業或事業上用到數學的學生，強調必須將教材對他們如何有用立即表現出來，單單只是保證對他們有需要還不夠。因此，彼得開始懷疑每一課程綱要裡的敘述是否真正合宜，或許無形中他浪費了學生的光陰。

彼得決定探討所教教材的價值。第一步，向那些教了五年，二十五年和更久的同事請教，可惜他們對未來的物理科學家、社會科學家、工程師以及中小學教師真正應當學習的，知道的並不比他更多；只是和他一樣拿着綱要「照本宣科」，卻不曉得綱要是誰寫的。

彼得其次從各科各類的教科書著手，他相信其他學校的教授可能已經解決他面對的問題。初初看到出版社的目錄時，大為高興，其中列有書名如：「文理學科用數學」、「生物學者用數學」、「社會科學家用微積分」、「工程師用應用數學」等。他趕快找到這些書，可是內容實在令人大失所望。除了作者姓名和出版社名稱外，各種教科書幾乎無法區分，不論作者在序言裡，或者出版社在廣告裡說是專為文理學科學生，或未來工程師，或商科學生，或未來教師所為，其內容幾乎完全相同。學習數學的動機和數學的功能全未提到。顯然這些作者不知道別人所需要的數學是什麼。

為了給與各別學生適合的教材，顯然需要有各種新課程，同時編寫新教科書，相互配合。這項重大任務自非一個人用幾年時間所能完成。彼得對調查學生的興趣以及寫作計劃態度積極，他希望能藉此勸說學生修習數學並喜愛數學，並使教師的精神因之提高增強。正當令人喜悅的想法在他心中盤旋的時候，另一種使人沮喪的思想，却像天邊黑雲隨即湧到。彼得最近受聘為起碼的教授，但升級和更重要的永久教職尚未取得。如不能得

到上述地位，則改進教學的努力毫無力量—無法將工作成果付諸實施。但升級和永久教職只能從研究一些深奧的、一般人不能了解的問題，方能獲得。而他只在做博士論文時，得到該論文領域的經驗與能力，所以他只有在這個領域裡選出題目。這類研究工作並不輕易，需要投入全部時間和精力。

他明白必需以研究為重，然後才有機會進行教學改進，因而彼得決定今後幾年專心研究。為了爭取研究成果的出版以及跟隨升級加薪的潮流走，彼得陷入了無法停止螺旋運動的漩渦裡，越接近中心越被研究吸入更深。同時，他仍按照系主任發給的教科書和綱要，繼續講授。彼得想，資深同事們佔着有利地位，可以打破一些傳統的教學法，因此，他想激起他們在這一方面做些改革，但他這種未能投身其中的努力失敗了。這些教授業已接受現實情況，選擇了在研究方面出類拔萃，因為由此而帶來的成功會獲致更高的聲譽和更多的收益。

彼得終於和其他人一樣，屈服於卓越研究的引誘力。至於學生，他們來來去去，很快就變成模糊的面孔和記不清的名字。雖然，教育上希望有顯靈的神，不過，彼得並非命中註定是改革教育的神。等到獲得永久教職，他也就進入一個集團，和其中原先的人一樣，致力於研究和訓練未來的研究人員。那些未來研究人員也將會被迫進行敷衍無效的教學。彼得就這樣陷入惡性循環之中。

彼得·藍德斯努力改革教學流產的經過，有些人看來似乎不免誇張而設想這只有在十九世紀的德國或法國才會發生。美國是全心致力於教育、並實施普及教育以幫助每一青年發展其潛力的第一個國家。建國諸傑，特別是佛蘭克林及傑佛遜，已經強調這一原則的重要並加以擇定實行。甚至直到今天還沒有另一個國家，在提供青年教育的機會和便利上能和美國匹敵。不過，教育制度的實際情形和國家的原則及政策間，顯然有重大差異。

彼得和其他成千上萬的同事都變成研究的奴隸，而整個教育系統的主要目標—教育—也被犧牲了，這一切究竟是如何發生的？是否進行研究的

壓力產自教授本身，由於他們偏愛聲望、地位和金錢報酬？或者，來自大學行政主管？不論是上述那一種情形，研究是否有助於教學，或者兩者間會形成對立？如若其間有衝突，又如何解決？在教育上，各學科各級學校的教師都在大學接受訓練，所以解決這一問題的重點在大學，高等教育制度的政策和實務必需首加檢討。

## 第二章 美國數學教育的起源

我必須說，我一點不尊重那些名爲大學，實爲可笑的權力官僚所聚集的機關。

盧梭 *Jean-Jacques Rousseau*

教學和研究間的關係是相容抑或矛盾，是相互增益還是彼此對立，顯然是必需探討的課題。進行這一工作，首先要查考美國教育的起源和現況，尤其應深入探究其所扮演的角色。此一史實至少能告訴我們爲什麼會弄到現在這樣的地步。

愛默生 (Ralph Waldo Emerson) 在「教育」一文中指出，美國的偉大標誌之一，是各級學校教育幾乎在最早移民到達之後，立即着手興辦。美國主要是由貧苦、未曾受教育、各種背景不同、語言互異的人民所組成，從這些事實來看，上述偉大標誌就尤爲突出。這些人來到美洲，不問是爲了獲得政治自由、精神自由，或者只爲物質上的必需品，總之，都是爲了改善自己的命運。當然，也有不少人是爲了有堅持自己宗教派別的自由。但不論追求的價值是什麼，一開始就興辦了教育。

小學當即創設，跟着就有中學。最早的中學是私立拉丁文法學校——相當於初級中學——第一所是「波士頓拉丁文法學校」於1635年成立。學院設立也很早，哈佛學院於1636年開啓大門，次爲1693年的威廉及瑪麗學院。耶魯始於1701年，原稱「康乃狄克專科學校」，位於老沙布

羅克，後於 1716 年遷至紐海汶，以捐助人依立胡耶魯之名作為校名。

十七及十八世紀期間新學院陸續開辦，分別屬於各派教會。事實上，最初各學院全力為各種信仰培養教士。例如哈佛即專門訓練清教徒牧師。在殖民時期直到 1765 年，唯一不受教派支持的學校只有賓夕凡尼亞大學。到共和國時期的 1787 年，才採取政教分離政策，認定以公款資助各宗派學校為非法。就是在有可能間接資助的地方，由於宗教不同及宗派恩怨，也使立法者拒絕以公款資助信仰與其相異的教會設立的學院。因此，興起更多的非教會學院。1816 年，國會通過「慕里耳法案」，顯示了重大轉捩點，准許以公款資助公立「無神」的大學，使農業和機械的技藝得到裨益。這一法案使各州得撥贈土地設立學校，其中以中西部各大學為前導。隨後幾十年裡，有更多的公私立學院和大學創設，但通常仍和教會密切連繫。遲至 1868 年，和教派一無關聯的康乃爾始在紛至沓來的批評聲中開學。

最初教育並未普及。在十七世紀，只有麻省這一處殖民地主張所有兒童應接受數年義務教育。到美國逐步安定，這項辦法也日漸擴展，到了 1910 年，除六個州外，全國一致施行。同時，學生必需在校的年齡也不斷提高，從十四歲、十六歲，最後為十八歲，不過各州則不盡相同。值得重視的一點，在十九世紀初葉，美國是唯一實行某種義務教育的國家。

到十九世紀後期，更進一步，義務接受中小學教育的權利已被公認，雖然這項權利尚未廣被利用。1890 年只有百分之七的中學年齡兒童實際進入學校。同年，適齡國民只有百分之三進入學院或大學。隨着人口增加，學生人數百分比也相對地急速增加。至於中學畢業生接受低學費學院教育的權利，首由中西部各大學實施。可是，這項權利過去有點華而不實，這些大學允許所有中學畢業生入學，但在第一年內不及格人數高達百分之五十至七十。雖然如此，接受學院教育的權利，在整個美國現正向前邁進。

至於美國教育的品質如何？在殖民時期以及共和國起初幾十年內，由於衣、食、住更為重要，教育只能使人比完全無知稍為好一點。修習數學和物理科學，就長期而言，甚至對增加物質貨品亦能有所貢獻。但為了當

前的極端窮困只得犧牲。國家教育的重點放在讀、寫、算和宗教方面。教學法在歐洲當時已受重視，但在美國竟無人注意達幾世紀之久。初級課本只告訴大家如何做簡單算術，尤其是所教的最多為抄寫數字或呆板計數，很難稱得上有什麼教學法。

算術在商業、探險、測量、航海各方面的需要，促使開設完備的算術課程。令人驚奇的是這一課程並不在小學施教。實際上，直到十八世紀，學校不是沒有這一課程，就是開設在學院或大學裡。在1729年以前，算術教科書都是翻印英國的課本，其後才在美國編印。第一本算術課本是1728年至1738年間任哈佛學院教授的依薩克·格林伍德（Isaac Greenwood）所編。他雖曾令人羨慕在英國讀書，但却因放縱而被開除。

十八世紀課程表的其餘部分是文化教材和道德誡命的大雜燴。重點是在使青年人不離開教會。同時也重視不斷造就以牧師、律師、醫師為事業的人。此外，更加上農林教育。一世紀後，因土地撥贈法而成立的學院，專設教育農業及森林兩科，但隨即擴展包括各門學科。1835年，托奎維耳（Alexis de Tocqueville）在所著「民主在美國」一書中，注意到美國教育的主要關切在功利及個人的成功。其後學院及大學逐漸接納文理學科，依照英國方式注重古典學術。至少在1900年以前，為名門子弟陶鑄品德及學習上流社會生活方式，也是教育的目標。

在十八世紀，算術逐漸下移到拉丁文法學校和中學，連同其他科目主要為進入學院做準備。因之，各學院——哈佛、威廉及瑪麗、耶魯、普林斯頓、賓夕凡尼亞，以及其他——將算術列為入學條件。耶魯始於1745年，普林斯頓1761年，而哈佛則遲至1803年。

到十九世紀，算術終於成為小學科目，主要由於日趨工業化，工人需要較高知識。心智訓練也是教這一科目的理由。1789年，麻薩諸塞州及新罕布夏州首先在小學教算術。直到十九世紀末，算術才確定作為小學課程表的一部分。

由於製造、鐵路、工程、繪圖以及修習科學，特別是力學和天文學的需要日增，促使代數、幾何及三角加入學院課程表內。這些學科自1788

年起，在哈佛、耶魯及達特茅斯的三、四年級施教。直到十九世紀末，大多數學院仍保留這些課程。1829年賓夕凡尼亞大學的數學課程爲：一年級複習算術、初級代數及幾何，二年級較高級代數及幾何、平面及球面三角、測量及求積，三年級才教現在學院的課程，如解析幾何及微積分，附帶還有透視的和數學的地理學，四年級完成初級微積以及初步有關動力學和天文學的主要數學課程。

十九世紀初期，少數學院開始以現在所稱的中學數學作爲入學條件。1820年，哈佛提高入學條件列入初級代數，耶魯於1847年，普林頓於1848年繼之。至於歐氏幾何，耶魯於1865年首次作爲入學條件，普林斯頓、密歇根、康乃爾於1865年，哈佛於1870年繼之。至十九世紀末，代數及幾何終於列爲中學科目。由於學院逐一要求代數及幾何作爲入學條件，所以準備升學及心智訓練爲中學講授這兩科目的理由。

自1820年至1900年，大學逐漸提高數學水準。1900年，三角、解析幾何、微積分成爲學院標準科目。十九世紀早期，大多數學院不再增加科目，只有少數學院再進而教微分方程以及其他高級課程。雖然如此，一般數學知識的水準仍然很低。

1900年，美國數學教育的情況，可以從一件可笑的意外插曲透露出來。鄉村醫生顧得溫（Edward J. Goodwin）並無真正的數學知識，於1897年，向印第安那州議會提請通過法案宣布圓周率 $4$ 爲之值。只要將圓面積及外接正方形面積的公式一加比較，立即可知圓周率不能爲 $4$ 。可是，議會已考慮接受。所幸，參議院在這點上頗合時宜，採取延擱措施，終於未得通過。選出的州代表裡居然有人做出這樣行爲，並不令人過份驚奇，因爲就連當時領導人物創刊的「美國數學月刊」，在1894年第一卷七月號裡，還照樣刊出顧得溫的提議。到1895年，該刊還正式刊登類似顧得溫的其他謬論。

提高數學教育水準以及教育更多青年的壓力，因美國成爲世界強權而劇增。第一次世界大戰肯定顯示需要更多的數學教育，而數學技術方面的應用之相對增多，更加強這種壓力。各大學的反應是提高入學條件並增加

較高層次的課程。

在上述美國數學教育起源的簡要說明裡，未曾提及如何求得教師的問題。提高正式教育水準和增加學生人數並不能提供教師來源。在殖民地時期，幾乎任何人都可以自命為教師，因為當時大眾主要是由未曾受教育的人組成，由此也可推想到當時的教學水準。遲至1830年，十九世紀早期美國教育家柯耳朋（Warren Colburn）在一次講演裡曾說：

除非在學術地位較高的學院中，從事教學職位並未被視為一項很榮譽的職業，反而認為低級，因而才俊之士很少有志於此。只有沒有什麼學問，又不願意或不適宜担任其他工作的人，才願意做教師。在這個時代，這種例子太多了。至於支持這樣做的原因，是由於大多數教師待遇正好只能請到這類人。

殖民時期建立學院，並不以訓練教師為主要的任務，但許多學院還是做了。允許進入學院原本只限男性，但因薪水低微，女性因而成為受歡迎的候選人。奧柏林學院於1837年開始准許女性入學。在內戰結束以前，這樣做的學院很少。更由於大多數學院仍屬各教派，所以不能成為公立學校教師的主要來源，也不能以公款在這些學院訓練教師。再加上較好的學院堅持增加入學條件，那些願做教師的人也不能夠達到這些要求。

賀來斯曼（Horade Mann）鑒於前述事實，乃在1830年代提倡以特種方式訓練教師。於是設立州立師範學校，招收曾受小學教育的學生，稍加教師訓練即派出任教。這類學校於1830年代後期，因賀來斯曼的領導遍及全美國。

有系統的供應公立學校教師，以便擴展普及義務教育，這個問題從未真正解決。事實上，由於未受教育的貧苦移民進入美國日益增加，更使問題嚴重化。至於學院的教師問題，情況也不見得比較好。1869年，哈佛學院校長艾略特（Charles William Eliot）曾強調吸引有志青年選擇教授作為職業是一項重要問題。他說：「有卓越能力的美國人，很少被引進這一職業。」優良教師的供應一直遠落於需要之後。在十九世紀及二十世紀早期，許多擔任教職的人並非出於最佳選擇，教職仍然待遇低且不受尊



重，幾無聲望可言。當然，一些有能力但財力不足無法接受其他專門職業所要求的教育，因而轉向教職。

本身師資尚不完善的學院及大學，逐漸負起訓練教師的工作。紐約大學於1832年開始允許教育教授成為學院教授團的一員，隨後其他學院也比照辦理。

直到1920年，訓練小學教師仍由師範學院進行，當時需要修習二至四年課程。學院則訓練全國的中學教師。後來才由學院及大學開辦教育院、系訓練中小學教師。直到1950年左右，開始將師範學校改變為四年制的文理學院以訓練教師為主。現在中學數學教師應讀四年文理學科課程並主修數學。至於小學教師所習學術性數學科目很少，但教學法講授頗多。

專一致力於師資教育而興起的學校和教授團，並未使教授本身應有的數學知識有所增進。事實上，直到進入二十世紀後很久，數學講授的水準都很低。教科書也很差，好的都由外國進口。

少數人則自我教育，其中傑出者之一為波迪區(Nathaniel Bowditch 1773~1838)。曾將歐洲數學名著之一，拉普拉斯(Laplace)的「天體力學」譯出並加註釋。此一譯本是美國甚至整個西半球，第一本真正的數學書。第一位真正偉大的美國科學家是自修成功的物理化學家，吉布斯(Josiah Willard Gibbs 1839~1903)，在向量分析上也頗有貢獻。許多教授都去歐洲接受教育，當然得到最好的教育。只有這些人才真正有資格講授數學，並訓練數學家。

漸漸的，教育品質和有用書籍多有改進，足以在美國本土訓練自己的數學家，但人數上還遠不敷全國所需。第一位由美國訓練成功的傑出數學家為皮爾士(Benjamin Peirce 1809~1880)，是哈佛畢業生。自1831年擔任哈佛教授，直到逝世。此外，其他哈佛數學教授，如奧斯顧德(William Fogg Osgood)和布齊爾(Maxime Bocher)，都在歐洲獲得博士後，再進入大學擔任教授。

本世紀初幾十年，雖然曾受良好訓練的數學家業已增多，不過數學教育並不能令人滿意。由於各級學校為數日增，教師自感不足。各州、各城

市、各鄉鎮對教育價值的重視，顯然都落後並使經費陷於窘困。結果薪資仍然很低，有潛力的好教師不斷改行，或選擇其他專門職業。

「教育測試服務社」所積存的記錄，有些足以顯示教師的素質。遲至1954年，該社約談過的小學教師都對數學又恨又怕，自必影響他們的施教。在370位受測的教師中，有一半未能說出某一分數比另一分數大，可知教師所知比他應知的為少。在大多數州裡，中學教師只要在學院曾修習十小時數學課程，就能得到教數學的合格證明書。更有許多州，只要有中學教師合格證明書就能擔任任何科目。

直到最近，美國各級教育人士最大的特點是無知。不僅數學課程實際內容低淺，而且將教育目標看錯或看不完全。我們無需在此深究幾世紀來美國教育方面提出的理論、爭執和異議。社會效益應作為一項目的，特別是在殖民時期，甚至在共和國初期，大家正為生存而掙扎。可是，算術又被當作心智訓練，還將延伸到其他領域。雖然中學數學部分科目可以因為有實際應用的效果，如用於測量及航業，而加以支持，但大部分中學數學科目，很難以這種立場為之辯護。因之，就有人提出以心智訓練、文化中一分支知識、這一科目的內在美以及為升入學院做準備等作為理由。

談到教學法，則直覺法和抽象嚴謹法均宣稱能傳授數學的價值，甚至其意義。運用具體教材和感官經驗的直覺法，為皮斯答羅齊（Johann Heinrich Pestalozzi 1746～1827）等所採用。實際上，教師只知道他們自己是怎樣學習的，就呆板的將演算和證明依樣傳授下去。練習是每天必做的例行工作。任何問題的答覆都是獨斷式回答：「就是這樣做」。例如，用一個分數去除另一個分數，就是倒過來再乘。兩個負數相乘的積就是一個正數。假設  $x + 2 = 7$ ，將2移項、變號，就得到  $x = 7 - 2$  或5。至於幾何證明的基本原理和理論基礎則從不解說。學生死記着這些，在考試時再還回去。

將教育院系附設在大學裡，很明顯，並無助益。數學教育者本身學習各科目時和其他人的學習的方式一樣，所以他們對數學的理解也不比其他好學生更好。事實上還要差，因為數學教育者認為他們不必像立志做專業

數學家或科學家的人，對各科那樣深入了解。此外，過去、甚至現在的數學教育者對施教和學習的心理學所知極為有限，所以在這一方面也不能有什麼貢獻。他們教未來的教師如何去做演練和死記的方法，也就是他們自己所學的那一套。

如向通常擔任教育心理學的心理學家請教，也很少能提供什麼，這是另一項未收成效的努力。哥倫比亞大學師範學院的桑載克（Edward Lee Thorndike 1874～1949）教授主張大量重複仿倣式演練。訓練學生自動反應：一聽到  $3+2$ ，立刻回答出 5，最後自然能理解。這種主義只不過支持已行之若干世代的反覆背誦教法。（請參閱第九章）這種教學法現在仍受一些教育家擁護。例如，哈佛的史金納（B.F. Skinner）教授——不過，現在稱為規劃程式學習法。

爲了改進教育，數學組織以及州和地方政府成立了無數的調查會、委員會。這類組織旨在研討教育的目標、內容和教學法。這段歷史頗爲廣泛久遠，但並未發生相關作用。這許多委員會、會議、座談會和調查會提出的改革遇到阻礙：一項因素是沒有可靠的評估方法用來檢查這類建議，另一個因素是變動太快，使教師難於妥慎地實施。數學教育者的努力和誠意自無問題，但是，數學教育的性質和目標，包括選擇適當科目，教學的最好方式，應用所佔的地位以及吸引和影響學生的方式等，上述這類研究均未能有所肯定。

美國環境的變化，無疑的會使許多當時覺得不錯的建議，失去意義。適齡學生進入中學的比例，美國從 1900 年的百分之十二增至 1967 年的百分之九十。由於人數的增加，進入中學學生的興趣和背景顯然更爲複雜。文學士（或理學士）的課程表，原來計劃給與青年一些古典（希臘）的和歐洲的文化知識，自內戰之後，擴大包容社會、物理、和生物科學以及人文學科。1900 年約有百分之四適合學院學齡的青年進入學院，上述計劃尚稱適當。到了 1970 年，約有百分之四十八，即七百萬學生，除獲得知識外，更由於各種不相同的理由，進入學院。學院必需能配合和適應更多等級的學術能力，更多不同的背景，更多新目標——最值得注意的，是

各式各樣領域裡的職業訓練。除上述各項變化外，還有於1901年始創的社區學院或稱二年制學院。這類學院是代替十九世紀後期為準備進入高級學院而設的私立初級學院。可是，現在社區學院有許多學生即以此為求學的終點，以謀求職業為主。

雖然基層教育的教員素質逐漸改進、教育系統穩定、設備亦尚適當、教科書和書籍種類很多足資採用，但在1920年到1945年間，數學教育仍屈居守勢。學生成績不良，參加傳統數學課程的學生人數減少——特別是代數和幾何，轉換訓練遭到反對。在這段時期，學院入學條件減少對數學的要求，學生儘量少選數學課程，許多學校甚至終止以數學作為入學條件，甚至有不少中學不以數學作為發給畢業證書的條件。任何數學教育的價值均受到挑戰。

1930年代的數學處境，數學教授貝爾（Eric T. Bell）在1935年「美國數學月刊」上，為文說明如下：

在今天自由進步的美國，數學家 and 數學教師是否正面對為繼續生存在歷史之中而艱苦奮鬥？為了共同的社會正義，美國數學正在打這麼一場仗，堅守立場——制止退却，作危險的後衛行動之戰，以避免被消滅。在實務和精神上，要有比過去更重大的表現，才可以使非專習數學的大眾有理由繼續支持數學和數學家。否則，這一學科及其耕耘者，如若被緊跟着的後繼者所消除，只能歸咎於自己。

隨後數學教育的歷史和實況，就深受新介入因素——研究，即原創性貢獻的影響。在數學領域裡，這種情勢的來到必然較遲。數學知識是累積的，譬如說，如果在1800年要對數學有所貢獻，一定要先懂希臘人、笛卡爾（Descartes）、費瑪（Fermat）、牛頓（Newton）、萊布尼茲（Leibniz）、尤拉、拉格蘭治（Lagrange）、拉普拉斯、及其他諸人的成就。在科學方面情形略同，力學在十八世紀末已發展改善，新手難期有所貢獻。新的科學領域可以提供較多的機會。例如，1800年電學開始發展，所以才使美國的赫尼（Joseph Herney）和英國的法拉第（Michael Faraday）共享發現電磁感應的榮譽。如就整體而言，十九世紀的美國科

學和美國數學同樣低於歐洲水準。

一般說來，在1850年以前，研究人員在美國並無地位，可能在水準不高的學院或大學擔任教師，利用不很多的空餘時間從事研究。不過，這類工作並不能獲得鼓勵。事實上，從事研究的人員甚至引人懷疑，認爲對教學不夠專心以及可能對課程表和教學法抱有極端的看法。1857年，哥倫比亞學院董事會的一個委員會就曾將教育成果太差，歸咎於教授「寫書」。認爲教授的職責不是推展知識而是傳授知識。

當然，那時候的美國並未準備真正進行研究，也不太注重爲研究而訓練博士。前面曾經提過，十九世紀，許多美國教授去歐洲研究，但人數非常少。雖然在大學術中心學習幾年，自有很大助益，但並不能造就成功的研究人員，尤其回到美國的知識環境以後，對研究不是未加推動，就是沒有廣受重視。研究人員需要有共同興趣的同事相互激發，又要有學生能繼續教師領導的工作，並能以問題和助力敦促教師。

實際上，在十九世紀，對研究的真正了解和尊重，並不存在。例如，上文提到的物理學家吉布斯任職耶魯大學多年未有薪給。而他對熱力學的研究，在歐洲已被廣泛了解、深受推崇。1901年所著關於統計力學一本第一流的書，爲克萊因（Felix Klein）、潘加瑞（Herni Poincare）等大師所欽佩，但在美國竟無人知。當德國著名的數學家、物理學家及醫師賀姆荷爾茲（Hermann von Helmholtz），於1893年訪問耶魯，在大學首長恭迎接待時，他問起吉布斯何在，這些首長彼此瞪目而視，困窘的說：“他是誰呀？”

甚至到了二十世紀初期，美國研究的實況，可以下述妙事作爲例證。這是美國數學家福特（Watter Burton Ford）生前的故事，福特於1971年以九十七歲高齡逝世。福特曾將博士論文提送哈佛，經由在本世紀初期幾十年，美國數學界一流數學家布齊爾、奧斯顧德、貝爾萊（Byerly）三氏審查認爲不能接受。遂又將論文投送法國著名的「數學學誌」，不僅刊出並獲編輯的讚譽。後來哈佛教授團推翻原議授福特以博士學位。

另一位早期美國數學家維納（Norbert Wiener 1894～1964），

他所專攻的領域，不為美國人士了解。直到歐洲數學家對他的著作開始頌揚，美國數學家才加以注意。雖然稍遲，所幸尚能在美國受到敬重。

約在1850年左右，數學及科學研究剛開始進行，當時大學的領袖認為這類工作不應屬於大學，應列入特設機構稱之為“研究院”。原來高級學位只限於法律、醫學、神學，後來耶魯於1847年開始進行研究生訓練，到1861年才頒授第一位哲學博士給數學研究生。哈佛於1872年訂定研究生方案，於1873年第一次頒授數學的高級學位。

各大學雖已開始進行研究及為研究訓練人才，但了解德國大學水準極高的人士承認美國研究能力薄弱。因而勸說財主設立大學，專門注重研究以強化已有的高級訓練。吉耳門(David Coit Gilman)促請鉅商及銀行家賀浦金斯(Johns Hopkins)新設大學以其名為校名，於1876年成立。以鐵路起家的史丹福(Leland Stanford)於1891年成立史丹福大學。哈勃(William Rainey Harper)亦說服洛克菲勒(John D. Rockefeller)資助支加哥大學於1892年成立。賀浦金斯及支加哥開始只有研究院，但隨即增加學院招收大學部學生。原先的研究院更認真注重研究訓練，而其他學院也增加研究生部分。經由這些措施使美國的教育在德國大學影響下，至少業已發動高水準的研究。

雖然像康乃爾的華特(Andrew Dicken White)，哈佛的艾略特及吉耳門等人士提倡並推動研究，認為大學應進行研究，但仍相信研究應次於教學。華特曾說：傳授真理更重於發現真理。艾特略在1869年宣稱「在這一世代，美國教授的主要任務應為勤勉的按時到課堂講授。」當他擔任校長的初期，對將時間專用於研究的教授，頗多疑慮，深恐這種活動妨礙教學。但是一世代後，大學領袖轉變了重點，將研究看得比教學更重要。支加哥校長哈勃領先這一改變，聲稱：「大學裡個別成員的首要職責是研究與考察。」史丹福的約丹(David Starr Jordan)也說：「大學的最高的職責是原創性研究。」

哈勃-約丹集團為此立場辯護，借約丹的話來斷定「研究是一切良好教學的依據，從來沒有二流的人成為偉大的教師，而且我也非常懷疑真正

偉大的研究人員竟是拙劣的教師。」幾十所大學的高級行政主管跟着約丹重覆唱出同樣調子，認為沒人可以成為良好教師，除非他也做研究。哈勃不僅將研究作為教授的首要職責，又規定芝加哥大學教師的晉升「大部分要看研究工作成果，教學的效果屬於次要。」指示研究所將所有研究生專門訓練為研究人員。知識的廣度喪失無餘而教學訓練完全不顧。將發現新事實及尋得已遺忘的事實，作為最高獎勵的目標。

不論將研究看成次於教學，或給與更高重視，研究確已廣被接受和承認。賀浦金斯邀請已成名的英國數學家沙耳威斯特（James Joseph Sylvester）擔任教授，拓展了有效發動研究的途徑。由於沙氏是猶太人，在英國找不到工作，來美任職自1877年至1883年。沙氏和恩陶萊（William E. Story）於1878年，創設第一種研究期刊「美國數學學誌」。這一學誌立即成為美國人早期發表有價值的研究論文的園地。更因有歐洲來稿益增其聲望。第一卷刊有在美國培育成功的數學天文學家希耳（George William Hill）的幾篇高度原創性論文，在1881年的一卷裡刊有皮爾士十年前所寫早已在私人間流通的一篇論文。

芝加哥大學組成之後，立即聘請傑出的研究教授。在數學方面邀約曾在德國求學的美國人慕爾（Eliskim Hasting Moore）以及兩位德國人波耳查（Osker Bolza）和馬思凱（Heinrich Maschke）。這所大學就成為美國第一個特出的研究中心，第一批真正偉大的美國數學家經由該中心訓練成功。其中包括畢克賀夫（George David Birkhoff）、狄克生（Leonard Eugene Dickson）、魏伯蘭（Oswald Veblen）等人。

賀浦金斯、史丹福及芝加哥創下先例後，其他大學立即跟進，着手徵求能在各校進行研究的博士。有些學院為增加聲望也徵聘博士，希望將研究人員列入其教授團內。可是，整體看來，博士訓練的素質，一般還是不高。一如沙特（Jean-Paul Sartre）所說，學位是對父親有錢但自己無意見者的報酬。素質不高的博士，期望做教師和研究人員，因而引起有先見的教育家恐慌。1901年，哈佛校長羅威爾（Abbott Lawrence Lowell）曾說：「研究院成為培養良善而溫順學者的捷徑。他們缺少活力、

獨立性和大志，這是一種危險。另一種危險是將會吸收勤勉而平庸的人進入研究院，後來成為學院及中學的教學主力。」幾年之後，力主研究的約丹深悔適合教學的教授日缺，歸咎於博士論文的偏狹和瑣碎。一項更有力的相同責難，發自哈佛名哲學家詹姆士 (William James)。他在 1903 年發表的「哲學博士——章魚」一文中，關心博士需求的迫切，將會破壞學院求學問的真正精神。他反對學院和大學爭取博士，只為了向世界證明他們的教授團裡有明星。他說：

任何人暫且想一想，會承認具有博士學位的力真能成為成功的教師嗎？他的道德、社會和個人的特性如果不良，將完全否定他能在教室裡成功。上述特性，在他的博士考試裡總無法加以算計……事實上，那不過是假貨、玩具、巧計，用來作為某一學院或中學一覽表內的裝飾品。

1908 年，美國名教育家富納勒 (Abraham Flexner) 已預見將來的大患，即使大學改進其博士訓練的素質，學院的教學也將成為「研究」這一祭壇上的犧牲。

不論好壞，重視研究的風氣仍日益加強。數學家決定舉行會議並支持更多期刊，進一步加以推動。於 1888 年組成「紐約數學會」，後於 1894 年改組為「美國數學會」。該會最初同樣致力於研究及教學。在本世紀初一、二十年，該會會員如慕爾、楊 (Jacob W.A. Young)、史密斯 (David Eugene Smith)、海得累克 (Earle R. Hedrick)、哈斯得 (Gesrge Bruce Halsted)、卡朱雷 (Florian Cajori)，以及其他諸人，對包含中學在內的教育確有積極興趣，提出明智建議，認真試圖改進，但在一、二十年後，該會重心已集中於研究。因而另一群人士於 1915 年組設“美國數學協會”，專一配合一般大學部的教育。到 1921 年，另一群關切中小學教育人士又另設「全國數學教師協會」。

研究越來越成為大學的主要興趣所在，以致在大規模大學裡研究所獲得的珍視愛護超過所有其他職責。如若美國繼續完全靠自己的人才，如何安排研究和教育，將永遠無法知道，因為未曾預料的發展改變了美國的情況。那就是德、義、匈及其他歐洲國家許多重要數學家，在希特勒時期，



逃離各自的祖國，有很多人來到美國。設於普林斯頓的「高級研究所」成立於1933年，提供博士後研究的場所。其六名數學教授中的三位是愛因斯坦（Albert Einstein）、紐曼（John von Neumann）和威耳（Hermann Weyl）。這許多難民隨即在美國各大學獲得位置，使美國數學力量大為增強。他們也訓練願作研究人員的博士研究生，因而博士在人數及素質上均增加很多。

雖然得到優良的研究人員，大有益於研究，但對學院階層的教學仍然很少貢獻。在希特勒恐怖時期，來美的流亡數學家都是德國大學訓練出來的。這些大學在失去這些最好的教授之前，均屬當時世界第一流的學府。這些著名的德國大學沒有一般大學部學生的教育。學生從中學直接進入大學各別學科，大都為獲得博士。訓練研究人員是這種教育的目標。如若學生不能完成學位修習，可以通過一種考試成為合格的中學教師。全是研究專家的教授，覺得無義務去關切教學法，並假定學生都具有學習的動機、精力和能力。雖然流亡數學家智力高、心地好，但由於背景關係，不能將他們的力量和知識分給美國大學裡衆多有不同需要的一般大學部學生。因而研究院更走向訓練研究人員，更少關懷教學法。

正當研究院吸收了來美的許多重要學者之際，第二次世界大戰爆發。這是一場科學家作戰的戰爭。更快速的船艦飛機，偵查用的及使高射武器控制更進步的雷達，火炮的射程和精確度的增加，更好的飛機船艦、潛艇駕駛航行的技術，以及發展原子彈，證明對戰爭極為重要，這說服了全美國，如若要保持強權的地位，需要更多數學和科學的研究。所以，在二次大戰期間及戰後，美國政府開始大規模資助研究。研究越來越成為有價值和聲望的活動，因此教授均專心集中於這類工作。研究的重要性增高，對研究人員的重視也隨之增高。美國教授在全國秀異份子裡一度地位並不太高，現在達到很高的社會階層。

政府公款也使教授地位大為不同。無數的資助研究的金錢都交給教授，使他們成為大學收入的財源。紙面上雖說一切研究贈款和契約，只包括完成政府機構或計劃實際研究的費用，但事實上，這類贈款內還可開支很

多其他項目。例如，教授可以資助所僱用的研究生以協助研究。結果增加了許多進入大學的研究生，使學費收入增加。教授從事契約研究工作，放棄了大部分教學工作，通常就找報酬低、年紀輕的講師代替教授上課，但仍用知名教授的名字作為吸引學生的賣座演員。為完成契約研究所需的實驗室及設備，當然由政府支付，但也作其他研究及教學之用。教授的秘書也在契約款項內付給薪資。此外，還能列支寬裕的攤費，使契約研究更有吸引力。契約研究確使大學擴大了其研究及研究生訓練計劃，不過，和通常所說的相反，對一般大學部學生的教育却並無貢獻。

明顯的結果是原已偏愛研究的大學，着手大力爭取研究教授。大部分教授和研究院將注意力全放在產生更多的研究人員，推動培植博士計劃，完全為這項目的。

本世紀初幾十年，研究學術的教授對一般大學部學生以及中小學教育，還很表關切，現在則完全捨棄。雖然如此，但使羅威爾在1901年表現關切的原因，似乎不再存在。美國現在有許多堅強的研究所，研究教授都很優異，研究成果，至少從數量來研判，頗為豐碩。數學研究能加強科學力量，而美國科技成就堪稱卓越。研究人員確能提供健全的研究生訓練。在這種訓練裡傳授的知識，更合向下滲透到達各級教育中去。明智的教授一旦關心知識的擴展，而且關心知識的傳遞，他們就能想出辦法轉述其所長，而為他們的學生——未來的教授和教師——善加運用並發生效益。

最近，在各大學及學院裡，組設大規模的教育院系，對中小學教師應能提供所需的特別教導和意見。如僅就數學而言，雖然美國數學會已經放棄原先對教學的興趣，但美國數學協會及全國數學教師協會業已承擔對一般大學部學生和中小學教育嚴重關懷的責任。表面上看來，美國的各級教育即使尚未臻理想，似乎確已達到非常合理，甚至可以說是相當樂觀的境界。

那麼，為什麼作為大學教授的彼得·藍德斯會面對這麼多的問題，還覺得自己無法解決呢？



## 第三章 現時數學研究的性質

問題是既使沒得到真正的成功，却會有勝利者

德萊敦 *John Dryden*

回溯了美國旺盛的數學研究大為開展的經過，便會覺得蓬勃的研究不僅有直接好處，還會對各級教育發生間接有利的影響。不過，從研究帶來的價值，全視研究成果的素質而定。所以，必須先查考一下現時數學研究的性質。

研究，就數學而言，有很特殊的含義，明確要求是新結果的創造，也就是說，不是新的定理，就是對原先結果有根本不同的更好的證明。除此之外，解釋性的論說、研究趨向的批評、歷史陳述的論文或書籍、各級所用的優良教科書以及教學法的著述，都不能算。所以，數學研究的評判標準和其他學科所公認的大不相同。例如，在英文這一領域裡，除了小說、論說、詩歌以及其他創作性文學著作外，連批評、傳記一對重要，甚至不重要的文學人物有新的了解、文學史實、以及課本一大都是選集，都可以認為是原創性著述。各別領域承認不同的評準，或許是明智的，且讓我們看一下，數學方面的評準將導向何處。

美國進入數學研究的世界，落後於領先專心研究的西方歐洲國家幾百年。美國數學家為了致力競爭，在研究上採取特別的方向和方式。

有一種計劃，就是進入較新的領域。例如，現在稱為拓樸學的一門幾何。新手進入新的領域佔便宜的地方，是不需要有很多背景知識，並且新領域的概念和方法論還很模糊。由於缺乏價值評準，所有的論文都有潛在的重要性，幾乎保證能夠出版。

當然，新領域裡進行研究較為容易的說法，也有點騙人。新領域的產生通常由於原有領域有了艱深而嚴重的問題，任何人想得到真正有用的成就，必先深入這些問題，再苦思焦慮頗久，才可望有意義的啟發。另一方面，如若只想證明定理，幾乎可以從任何可能有關的概念着手，看看能對這一定理證明些什麼。果能得到結果，又是旁人未曾做過的，那就可以出版。

美國並不是唯一走這種路線的國家。一次大戰後，波蘭重行組成國家，波蘭數學家想共同努力在國內將數學建立起來。他們決定集中力量到很小的領域，即稱為「點集合論」的一門拓樸學。為什麼選上點集合論？只因為當時這一門仍然很新。可以從起跑線開始，引進一些概念，訂下一些公理，然後據以證明定理。提出這項實例，並非詆毀波蘭數學家，過去和現在波蘭數學家中都有一些很優秀的人才。優秀人才就是從非常淺顯的起點着手，也會有進展獲得良好的成就。值得注意的是他們公開而且慎重宣稱從點集合論開始，從事這方面工作無需深知數學。

另一項較容易得到成就的研究方向是一般化。早先希臘及歐洲數學家偏愛探求有深度的特定問題，可是近年來，許多研究人員轉向將原有結果一般化。早先數學家研究各別曲線和面，二十世紀許多數學家則喜歡研究曲線族。越是一般的族，有關定理越值得珍視。除了將曲線的研究一般化外，數學家也將幾何研究以  $n$  - 維代替二維或三維。有些一般化當然很有用。例如，學習如何解一般二次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$ ，其中  $a, b, c$  為任何實數，立即就能對  $a, b, c$  是特定數的千百萬個問題，加以處理。

可是，如果僅為一般化而一般化，只是浪費時間。喜愛一般化的人常忽略了值得注意的目標，反而不停的任意搞出越來越多的無用定理。不過，對主要關心出版的人而言，研究一般化不失為明智之舉。

威耳，本世紀重要數學家之一，對無意義的一般化表示輕視，曾於1951年說過：「近幾十年，我們的數學沉迷在一般化及形式化之中。」另一位權威人士波利雅（George Polya）在其所著「數學及合理推論」一書中，除了支持上述責難，更說：「膚淺、廉價的一般化現在更流行。」

近年來，數學家還寵愛抽象。這雖和一般化有關，但方向有些不同。十九世紀後期，數學家看到如正負整數和零；變換一如軸的旋轉；超元數，像四元數——複數的一種擴展；以及矩陣，這許多類物元都具有相同的基本性質。

現以整數為例，說明一下那些性質是什麼。它們都有一項運算，在以整數為例裡指的就是通常的加法。按照這項運算，兩整數之和為一整數；任何三個整數都滿足  $a + (b + c) = (a + b) + c$ ；有一個整數，0，能使  $a + 0 = 0 + a = a$ ；最後，每個整數，例如  $a$ ，有另一整數  $-a$ ，使  $a + (-a) = (-a) + a = 0$ 。這些性質，在以正負整數為例裡，多少顯示得很明白。

如若現在代替整數，我們談的是一個物元的集合——可能是變換、超元數或矩陣——以及一項運算。雖然未曾指明特定的集合是什麼，而且所談的運算也未曾指明，要看特定的集合而定；可是，用抽象語言我們可以說，集合的元和運算具有像整數一樣的四項性質。這種經抽象形式所定義的集合就是所謂的群。群是一項概念，用以摹狀或含攝許多具體的數學集合及其各別運算的基本性質於一項抽象公式中。如若依據抽象群的四項性質，可以證明另一些性質一定成立，則這些性質在群的每一具體解釋或表現中一定成立。

群，這種對數學及物理均極重要的概念，只是幾十個抽象體系之一。抽象體系又稱為結構——結構是現在的時髦名詞。許多數學家專心從事研究這些結構的性質。事實上，結構的研究很興盛，僅就群而言，已有的研究足夠寫成很多本書。

抽象確有其價值，上面正好已經提到一項好處，就是抽象體系的定理一經證明，當即知道可以用於許多具體解釋，不必為每一解釋再行分別證明。此外，抽象是探求基本要點，免得將心智用在細枝末節，促使其集中

於有決定性的要點。不過，如何選擇真正的基本要點並不是一件簡單的事；必須要有洞察能力。所以有膚淺而無益的抽象，也有深入而有力的抽象，而前面一種比較容易。我們還要認清：研究這類膚淺而無益的抽象系統和解答新而難的問題，兩者並不一樣。例如，像牛頓證明每一行星在太陽重力吸引之下，運行的軌道是橢圓，就是屬於後一種。還有遠更困難的問題，如求出三個天體在重力相互吸引下的各別軌道，這一問題至今仍待解決。不幸，近時許多抽象均屬膚淺。

除了有些抽象不免膚淺外，所有抽象尚另有一項負面的特徵。雖然經由抽象而求單一化可能是一項好處，不過，擴大的抽象觀點，也使數學付出「失去辨析力」的代價。抽象忽略了對解決特定問題最為重要的具體細節。例如，整數、分數、無理數加法的實際運算方法等等就沒有包含在群的概念之內。所以概念越抽象、越空洞，也就是說外延越大則內涵越少。

抽象還有另一可議之處，理論趨於抽象，要用到更特別的術語，更奧妙難解的概念，因而通常也就變得更難理解。此外，不受限制約束的抽象，將使注意力離開整個應用領域，並使應用所必需的細節不為抽象觀點所顧及。專心於抽象證明花掉了全部的時間，對個例的瞭解就無力顧及。一旦抽象本身成爲目的，就不再想應用到有意義的具體情況上去。抽象只是數學一塊新的碎片，數學中那些原應蒙受單一化和洞察力之利的領域，反而不受從事單一化者的關心。

威耳反對不受限制的抽象，曾說：「儘量朝向抽象化方面發展，同時毫不關心有深度問題的進展，使得許多人開始擔心數學的實質。」過度注意於研究抽象結構，也使另一位數學家提出警告：「太多的數學家在做畫框，而作畫的人却太少。」

另一項流行的研究方向，可以概括稱爲公理論。在十九世紀後期，數學家爲他們這一學科尋求基礎，轉而對各項數學發展，例如實數系統，提供公理依據。而且如若發現某些公理系統有缺陷，就進行改進，歐氏幾何就是其中最顯著的實例。由於數學有幾十分支，也就有幾十種公理系統。有許多系統含有十、十五、或二十項公理之多。這些系統的存在引起了許

多新問題，比方說，如若某一系統有十五項公理，是否可以減少公理數目，而仍能推衍出同樣的定理？在某一原有公理系統內，改變一項或更多的公理，會有什麼結果？後一方式的研究，著名的標準例證，當然是改變歐氏的平行公理，結果創造成雙曲線非歐幾何，而改變幾項公理則導出橢圓非歐幾何。如果一個系統有多達十五項公理，顯然可以想像到的變化就太多了。

對改變歐氏幾何平行公理的影響，加以研究，確屬明智之舉，而與此對比，現在數學家從事的各種公理研究，幾乎沒有什麼理由要這樣做。他們之中很多人根本認為，數學就是研究公理理論的科學。當前這一領域的活動太多且過份強調。只要公理被認為是關於物理世界性質的自明真理，則儘量簡化公理值得讚許，因為能使真理更爲明顯。不過，現在的公理常是任意選出的假設。如果重點放在從最少的公理儘量導衍出最多的定理，而選擇這些極端人爲造作的公理的理由就是想把公理數目減至最少，這就很難辯解。其目的似乎只是要爲一公理產生更多的定理，不問公理如何曲解和反常。因之，長篇論文盡含沉悶乏味詭譎但無聊的內容，並不能開花結果。雖然如此，公理論已經頗受歡迎，因爲它不必發揮想像力以創造新觀念，只要將已知結果重新安排並提出一些細微問題。

1951年，威耳對流行數學研究的特徵所作的批評，也包含公理論，他說：

二十世紀數學非常顯明的一面，是公理方法所扮角色的重要性大增。公理方法從前是為了說明建立數學的基礎而用的，現在成爲實質數學研究的工具。不過，沒有發明新的建構方法，數學就不能有多大成就。或許可以說，現代數學的力量要看公理化和數學建構間的相互作用而定。

現代的公理論還有另一種活動，也不無疑問，說得不好聽，可以稱爲「以公理消磨時間」。這種活動是隨便採取一些公理看看能夠導衍出什麼結果。現時著名的數學家奈凡林那 (Rolf Nevanlinna) 曾提出警告：「創立完全任意抉擇的公理系統作爲起點進行邏輯研究，決不會得到有意義的結果……近幾十年，對這項真理的認識似已淡漠，特別是較年輕的數學



家。」

在 1870 到 1925 年間，頗為活躍的一位主要的德國數學家克萊因曾說過：一位數學家如若不再有更多觀念，他就只好致力於公理論。另一位傑出數學家有一次談起，當一門數學科目可以公理化時，就是該埋葬的時候，而且公理就是它的訃聞。

上述幾種研究方向，事實上指出問題有軟性和硬性，也就是研究有軟性和硬性。在優秀數學家為數頗多時，軟性問題很少有人想去解決。此外，最先了解抽象結構之利者，是十九世紀的數學家。對這類研究，他們所面對的困難比今天數學家為大。現在數學家很多選擇解答軟性問題，甚至許多繁雜的證明，所得結果只是令人難懂的廢話。

數學研究還有另一項特點，嚴重影響本書最關切的重點——研究與教學的相互關係。現時研究，不論是一般化、抽象化、公理論或其他方向，幾乎全都認為屬於純粹研究，不談應用。純粹研究的特徵是為數學而數學，也就是對一項題目或問題如何產生，根本不加聞問。至於從事研究的理由只是為了美感興趣、智力考驗、或完全出於好奇，他們的口頭禪是：「讓我們看看能證明些什麼」一位公理論的研究人員決定將某一公理任意加以改變，其動機僅為查看在定理上會引起什麼變動。另一方面，應用數學所關切的，是由科學家提出的問題，或者某一題目，研究人員認為有潛在的應用性。

應用數學的問題，毫無疑問，一定比較難。通常和應用數學有關聯的各支數學，到現在已經有幾百年之久。許多數學界偉人均曾致力於這些學科。比方說，現在任何人如果想在偏微分方程獲得重要成就，必需先有深厚的學術背景，而且在應用數學領域內，理想化過程和模型的建立，又必需對相關的物理領域具有深入知識，否則，可能忽略了所研究現象中的一些要素（參閱第七章）。

純粹數學較易得手還有另一項原因。應用數學涉及的問題要和科學需要配合，不能隨意改動。至於純粹數學家原本想解決 A 問題，由於無法得到結果，或者在 A 問題裡加添一些假設，或者從進行解決 A 問題中得到的

暗示，將之改爲雖和 A 有關但已完全是另外一個問題 B，再行解答。或許在工作中更有意外所得，再改成問題 C 而得解答。無論如何，他總是有了結果可以出版。換句話說，應用數學家一定要能爬上一座崎嶇陡峭的高山，而純粹數學家如果爬不上一座高山時，他可以放棄，只要走上附近的小丘也就行了。

傳統上，數學總是關連到科學問題，而且都知道很難解決。今天，只有很少人肯加研究。放棄傳統的、豐富的問題來源，其理由是基於一項新理論：數學獨立於科學之外，數學家有研究任何有興趣問題的自由。他們說，今天的研究成果，將會在十年、五十年、一百年後用到。爲支持這一爭論，純粹派者不惜歪曲歷史引用一些似是而非的例證。但是真正讀過歷史的人，自會揭露這一爭論的錯誤。事實上，數學中所有主要分支都是從解決科學問題發展而來，就是現在爲滿足美感而研究的極少數學科，原先還是由實際問題所促發，例如，數論的起源可以追溯到畢達哥拉斯學派，當初也是爲了研究自然。直到1900年，數學和科學開始急劇擴大分離。今天，大多數數學家不再熟知任何科學，甚至對所研究的數學和實在問題有任何關係，也不再關心。

曾在耶魯、哈佛、芝加哥擔任教授的史東（Marshall Stone），於1957年，在“數學與科學的將來”一文中，承認一般性和抽象化——總而言之，純粹數學——是美國近代數學的主要特點。他又說，最好的應用數學工作是由物理學家、化學家、生物學家所完成的。最好他再加上一句，在真空裡發展的數學，將被證明真的空了。

近代研究一項十分不同的特色，是專門化。全球性科技的廣泛研究，使得任何人無法在廣大領域裡，保持跟得上。爲了避免被日益增多的競爭者先獲結果擊敗，以致白忙多月一無所成，迫使數學家必須去找一個自己的小角落。數學現在已經碎裂成上千的專門科目，還在像阿米巴一樣急速增加分化。許多專門科目成爲自治區，以專用術語和方法表現其特色。數學家的大集會，很像受上帝責罰後的巴比耳城居民，各說各話。純粹數學家和應用數學家、這門的學者和另一門的學者、數學家和教師、數學家和

科學家，彼此之間都無法溝通。假如任選兩位數學家關在一間房裡，幾乎可以肯定由於不能相互了解，他們只好談天氣。所以現在很少舉行大會，而某一專題的座談會、研討會反而很多。研究偏狹的實例極多，任選一本學誌的一篇論文即可作為例證。茲舉一二簡單例子如次：有一篇論文討論強整數 (Powerful Integer)。一個整數如被質數  $p$  除盡，也為  $p^2$  除盡，則此數稱為強整數。對這並不迷人的題目已有幾篇論文，一定跟着還會有更多論文。但願這些論文會比這一概念更強！另外有一題目稱為可欽數 (admirable number)。畢達哥拉斯學派在西元前六世紀引進完善數 (perfect number) 的概念，即一整數如等於其因數 (該數本身除外) 之和，則稱為完善數例如， $6 = 1 + 2 + 3$ 。如一數的因數之和大於該數，則此數稱為盈數 (abundant Number)。例如，12 即係盈數，因  $1 + 2 + 3 + 4 + 6$  為 16。有人因而想到因數的代數和，即因數相加減的結果。例如， $12 = 1 + 3 + 4 + 6 - 2$ 。一數如為其因數之代數和，就稱為可欽數。現在就有人尋找可欽數並研究其性質。當然，可欽數的性質同樣可欽。照着同一路線，還可以有超盈數的超盈定理。

選用上述小小的例證，為了可以立即看出現在研究的偏狹和無意義。正像將顏料塗在畫布上並不必然會創造出藝術品，用一些文字和符號也並不必然是數學。

專門化在十九世紀末開始流行，現在大多數數學家只致力於數學的某一小角落。每個人都順理成章的把他那一小塊，說得比所有其他部份重要。他出版的作品不再為多數人，只為極少的幾位同行。這類論著不再提到和數學裡更大的問題有那些關聯，因之許多數學家既接觸不到這類作品，也不會有興趣。今天的數學研究分散成太多的專門科目。從前對相對論一項不正確的說法，剛好可以用到數學研究上：任何一個專題，全世界能懂的人不會超過十來個。

今天，每位數學家都想將自己孤離在一個小區域裡，為自己而工作，並厭恨他人侵入，以免搶去他的工作成果。甚至近代偉大數學家之一的維內都承認：「我討厭必需天天注意文獻，以確證巴納區 (Banach) 或其波

蘭門徒之一，並未在我之先刊出重要的結果。」於1963年以九十八高齡逝世的法國數學家領袖哈達馬德（Jacques Hadamard），曾說：「在致力於某一類問題後，發覺有幾位作者開始走相同路線，我就放棄，再研究其他問題。」

能和大家在一起，又可保持孤高不被打擾，也有辦法。最好是引進一些新概念發展成無止境的定理。可是，這些定理，就最保留的說法，其意義仍頗有問題。這些造作出來的資料創造者，甚至還訓練博士研究生。由於研究生對數學的方法和判斷尚無經驗，可能真正相信這些資料很有價值，還使老師的大名廣為傳佈。

大多數致力於專門科目的人士，不再知道他們所研究的一類問題，原先是如何被提出來的，也不注意這類問題可能還關聯到更大的目標。近代拓樸學者或許連里曼（Riemann）和潘加瑞的成就都不知道。現在研究李氏代數的人士，可能連李氏代數的目的也不知道。這就不免本末倒置。研究限定範圍內問題，應對其所處的更廣大領域有所貢獻、有所闡發。專家所採取的立場，似乎像是主要領域的存在，只不過為了可提供問題以發揮他們的智巧。專門化促使人退到偏狹，缺乏文化素養，不會比技藝工匠更好，終致成為奧鐵加伊·加賽（Jos'e Ortegay Gasset）所說的「有學問而無知的人」。但專家們不肯承認這點。

由於不斷分門分支越分越細，專門化研究越來越不準備去綜合，去將各分股絞合在一起，去探究深一層的基本問題，不肯從畫框前退後以便看清畫面全景。專門科目的研究完全不關切本身的綜合，雖能助長局部的能力，但同時也成為對全盤無知的藉口，甚至還認為值得誇耀，更存心忽視超越偏狹專門科目限制的其他問題。而這些問題往往能使數學整體更具意義。

不加約束的專門化轉而為害專門科目研究本身，雖然專業化源由於專門科目的需要。最顯明的一項原因，是專門會鼓勵無限制的知識上近親婚配。近親婚配增加不良特性影響的範圍，這一定律原不僅在人類遺傳方面發生作用。此外，無限制專門化妨碍到任何外人對這一科目的興趣和參與

，縱使外來的人在支持所提出問題的關聯性以及研究方法上，可能有重大貢獻。創造性的學者、作家、藝術家，最終都是致力於一項偉大事業——追求真理。專門化減低了對「追求真理不容分割」這項事實的警覺。換言之，專門化削弱了學者的基本熱忱。

許多明智之士都注意到專門化的缺失。克萊因在所著「十九世紀數學史（1925）」中，曾說：學院的數學家之於同儕就像樹木在森林中一樣，爲了生存，必須保持狹仄向上直升，才可以得到一些光線和空氣而生存。1951年，威耳說：「進入本世紀以來，物理學的發展有如巨流奔向一個方向，而數學則像尼羅河三角洲的水朝著不同方向作扇形推出。」他在所著「典型群」（第二版1946年）的序言裡表示對數學過份專門化的關切，他說：「據我的經驗，應付數學研究太澈底專門化和技術化的危險對美國的數學家而言特別重要。」

希爾柏（David Hilbert），本世紀最偉大的數學家，也關切專門化，他說：

數學是否有一天會面對像其他科學久已經歷過的，分成許多小支的問題？這項問題還逼着我們，將使各分支的代表無法相互了解，因而不斷減少關聯。我既不相信，也不願意這種情形發生。數學這門科學，據我看來，是不容分裂的整體，是一個有機體，支持其生存能力，在於各部份間的連絡。

專門化的趨向已經使數學系分裂成四個或更多的系——純數學、應用數學、統計及機率（這一領域裡兩組間的敵對，正預兆將再行分裂）、電算機科學。當然，各系間幾乎沒有溝通，而在經費、師資、學生方面的競爭則很尖銳。

專門化的壞處，顯然導致工作成就低劣。專門人士限定在自己有興趣的範圍裡，其所選擇的範圍爲了避免競爭和躲開更大更重要的問題，這點我們前已注意。以出版作爲目標，任何結果只要能出版就出版。加賽在所著「大眾的反抗」一書中，曾說，專家門化給與庸才以生物學家所謂「生態上的適當位置」。

專門化既然是當前常態，爲什麼不能有專門的學誌期刊？於是這類刊物現在極多。專門人士只閱讀和自己範圍有關的學誌期刊，在他們的專門科目以外，發生任何事情都不知道。能涉及數個領域內發展的期刊已經極少，全未論及統合，更說不上數學整個領域。

數學研究又常遭遇另一種壞影響——時尚。數學家 and 所有人一樣，會產生個人的狂熱或者爲當前時尚所誘惑。研究的方向多由有聲望權力的數學家決定，而這些數學家又常爲突發的想頭和探求新奇的意念所支配。例如，十九世紀，研究橢圓函數、射影幾何、代數不變量，高次曲線的特性等科目就很趨向極端。當時認爲很特出的成就，今天看來並無重大意義，在整體數學裡幾乎沒有留下痕跡。

這並非批評數學家某一時期在某一領域中的熱烈研究，就長期而言，必被證明並不重要。數學家要判斷什麼是有價值的，就連最聰明的人也會發生錯誤。研究常帶有賭博性質，無人可以確信其工作必有報償。不過，時尚使得一項科目的研究超出其任何有意義的期望之外。

現在時尚的蓬勃發展，是由於數學不再將有助於科學作爲標準，而以美感爲標準。可是，美感純粹是主觀的，王爾德(Oscar Wilde)曾對時尚有最尖銳的批評：時尚是暫時普遍流行的蠢事。

時尚的另一壞處是：使可能有價值但非流行的觀念，受到忽視。輝煌的成就常遭棄置，雖然其中有些後來或身後會被認識。從高斯(Karl Friedrich Gauss)的工作可以找到典型實例。雖然在青年時期，高斯已被認爲了不起，但他不肯出版自己在非歐幾何方面的研究，怕被同輩數學家反對。照高斯的所說：我怕波依替亞人——古希臘心智笨拙波依替亞城邦的人——的喧鬧。所幸，高斯關於非歐幾何的研究，在其死後所遺論文中被發現。當時，他的聲譽隆盛，其觀念自受最高崇敬。

研究人員若將自己成就的價值看得很高，就應當讀些詳實的數學史。而數學家大都不曉得數學史。他會發覺有一點很有趣，即許多過去認爲重要、視爲核心的成就，會完全消失，甚至那些活動或分支的名稱，現在也不再提到。雖然難得有人能從歷史裡得到教訓，所幸時尚並不能長期支

配研究的方向。不論個人創造了什麼，註定要和數學的逐步發展相關聯才得存在，並證明其成果為有益。

現在要提到價值可疑論文的一來源——即博士論文及其後續研究。學生作為研究的新手自不能解決重大問題。他們所解決的問題，不僅出於某一教授的提示，還更賴其助力完成，所以，結果所得均屬次要。事實上，那位教授事前已經知道如何解決。如若教授未能預知結果，他反覺擔心是否指定的問題對新手太難。

在今天的世界裡，新博士不得不生產低品質的研究。因為大學現在需要較多的研究人員，如已進入或想進入大學領域，就會受到出版的壓力。在這種情形之下，能出版些什麼？在他生命的這一階段，實在還未具備出版有價值論文的準備。他的唯一研究經驗是博士論文，在教授指導之下就僅獲得必要知識以完成可被接受的論文。實際上，他只有再在他的博士論文中加一些點綴的能力，為了有總比沒有好，也就顧不得明知他只能出版一些無甚價值的論文。如若他想解決較深的問題，就需要擴大背景知識，可能需要費時幾年，還必須冒失敗的危險，可能有好一段時間沒有東西可以表現。所以，他必需解決立即可以成功的問題以後將之出版，即使解答過程可能很辛苦而結果並無意義。

加於大學教師及青年學者身上的出版壓力；在科學導向文化裡研究工作正自然擴大；蘇俄、日本及其他國家在本世紀中進入研究領先國家集團；擴充哲學博士訓練以配合大學及學院的需要（僅美國一國，近年來，每年產生數學博士 750 至 1000 名）；以上諸項因素的結果都從出版物數量反映出來。現在全部或部份登載有關數學研究的期刊學誌已達一千種以上。專門致力於數學的，約有五百種，幾乎每週就新出一種，其中論著的摘要均刊載於「數學評論」。不過，評論內所載尚未能包括全部論著，事實上許多有關教學法和很多應用數學的論文，都未列入。1970年，該刊計有 16,570 項評論，1973年為 20,000 項評論。假如所有應用數學論文均包括在內，則 1973年，該刊應有 40,000 項評論。出版物擴增的年增加率為百分之五。1955 至 1970 年期間的出版物數量和有記錄史以來所有的出版物數量相

等。刊出的論文只佔投給各刊物稿件數量的四分之一。由此可知，大學教師使出何等力量來攀登研究的階梯。

爲了幫助數學家熟悉已經出版論著的範圍，還有第二級，甚至第三級的輔助刊物，如索引及篇名目錄等。「數學評論作者索引」，就是將「數學評論」所刊摘要的作者，按學科編列名單。從1940到1959年的這本索引計共2207頁。自1965到1972年的一本計共3032頁，包含127,000項。前二十五年1940-1964，的一本索引，計共156,000項。另有雙週刊，「當代數学期刊目錄」，提供期內所有數學論文及書籍，按學科分類的索引，包括1200種期刊，但有些應用數學方面的著述並未列入。我們可以期待即將有目錄的索引以及索引的索引問世。

出版物的數量引起知名數學家的批評。其中之一，爲希爾頓（Peter Hilton），他說出下列一段話：「我們全都同意，撰寫及刊出的論文實在太多。我們成爲不閱讀任何東西的作者群，完全由於沒有時間去閱讀。即使每天用十八小時去讀新的數學資料，在一天終了時反而比開始時有更多的東西要讀，想一想真可怕」。除了人口要零成長外，美國的刊物成長目標也應爲零。

一般都承認1930年代當時的研究步調還很緩慢，可是十篇論文裡就有九篇並沒有說出什麼東西，也對數學沒有什麼影響。多倫多大學教授邁文（Kenneth O. May）提供很有意義的數字資料，他從十七世紀到1920年，近二千種刊物，就其中有限的關於行列式題目加以研究，結果如下表所列：

新的觀念和結果	234	14 %
重複（獨立而同時發表的，除外）	350	21 %
教材和教育資料	266	15 %
結果的應用	208	12 %
系統化和歷史	199	12 %
無重要性的	737	43 %
總計（包含重疊部份）	1994	117 %



上列百分數為 117，由於有些論文屬於兩個以上的類別，實際論文數目為 1707 篇。邁文估計關於行列式有意義的資料，包含主要的歷史說明，不足論文總數的十分之一。更指出在 1851 年，某一重要期刊將一篇論文重複刊出十次。今天，刊出的論文遠比以往更多，又對研究有無意義更少關切，出版物提供的新資料可能不會超過百分之五。至於重複發表的例子更不勝枚舉，有些曾為「數學評論」注意到，「美國數學月刊」也不時報告重複及錯誤，甚至引證指出有些號稱為新研究資料，發覺早經編入教科書。我們並非說其餘的百分之九十五均屬無用，其中少數可能會有教育上價值。不過，期刊裡充滿了意義屬於蚤量級的論文，污染了知識世界，正和汽車污染我們所呼吸的空氣，同樣有害。

有些作者存心將原有研究稍加改變，或用新名詞改寫舊結果，再行出版。不幸，引進新名詞是永不停止的遊戲。翻譯老資料可以不被發覺順利通過，假使不能肯定曾有用德文撰寫的某一篇論文，如果現以法文寫出，只好接受作為新的。一位十九世紀著名的德國數學家就曾將英國論文譯成德文作為自己的成就出版。又有一些研究人員將相當完整的論文拆散分成三或四篇較短的論文。這類詭計使論文得以重複刊登，結果增加刊出頁數並讓人認為作者有豐富思想。

大量的論著以及不斷增加的期刊數目，甚至專門人士也無法盡讀他那個範圍內發表的資料。雖然專家都說要瞭解已有的成就，而實際上却完全忽視有關文獻，除了極少數論文他剛好看到了，又正好和當前自己的目標——出版自己的論文——有直接關係。發表的論文有歷經數月或數年，才為有心人發現重複而提請大家注意。

除了浪費以外，論文泛濫還嚴重困擾研究工作。謹慎的研究人員力求了解他那一範圍內已有的成就，一方面可以利用已有成果，一方面避免重複。他必需吃力的閱讀大量論文，花費極多時間和精力，但還是有不能完全讀遍所有有關文獻之苦。

想詳悉有關文獻的問題，在十七世紀已經困擾了海更斯 (Christian Huygens)，在 1670 年，他抱怨說：「……要牢記在心，如若繼續按照古

時嚴謹的表達方式，數學家決沒有足夠時間閱讀所有幾何方面的發現。數量逐日增加，在這科學時代結果似乎會發展到極為龐大。」萊布尼茲在十七世紀末痛惜於「著作多得怕人，還繼續增加，只會將有心參與科學的人趕跑」。

就數學而言，新的結果容易受到認可，克服證明上的困難，也容易被看出，似乎論文可以順利而準確的加以評估。大多數期刊在接受稿件時確先送評審，不過，能作評審的優良數學家往往忙於進行自己的研究，而要查看的出版物數量又太大，因之，對他們專門科目有關論文的評審工作已難有所作為，更談不到涉及數學其他領域。此外，大多數論文，解說均欠充分，亦難判斷其正確性。

由於數學家所習偏狹，所以在評判什麼是根本的，或什麼是無足輕重的，什麼是基本洞識，或什麼只是技術性的枝節這類問題，也不適當。至於有關科際整合性的論文幾乎無法找到優良評審人員。評審工作更牽連到個人因素，人通常偏愛朋友，反對競爭者。

美國數學會最近一項決定，正好說明對評審工作現況的反應。在1975年以前，該會資助的幾種期刊，對所有送請出版的論文在委請人員評審時，都註明作者姓名及所屬機關、學校等資料。後來該會選擇一種期刊試行不記名送審，即送審的論文上不記作者姓名及所屬機關學校等資料。結果受邀的評審人員，甚至包括該刊兩位副編輯，均提出強烈抗議，並指出這是吃力不討好的工作，約請優良評審人員的困難，以及有關評判論文的正確和價值的種種問題。在不斷的爭辯中，從刊出投書部份可以看出，反對不記名送審的人承認作者姓名及所屬機關學校等資料，對評審過程有很大幫助。其實反對者真正的意思是說，他們的評審並非就文論文，多憑作者的聲譽以及和學術界的關係來決定論文的正確和價值。從這些抗議來評判，可見許多評審人員只就有關資料作決定。這項辯論揭露了評審方法所具的缺失。

此外，現在還有許多論文不經評審人員評判，即行出版。每年有無數的座談會，在其中宣讀的論文即自動刊在所出版的論文集裡。有些大學自

辦的期刊，教授可隨意刊出其論文。「國家科學院論文集」不僅自動刊載院士的論文，經由院士提交非院士的論文也照樣刊登。該院出版物的浮濫，可從1970年編輯人員的一項決定看出，即規定每一院士每年刊登論文不得超過十篇。

以現在的情形和十七、十八、十九世紀相比，顯有不同。那時候，出版物當然少得很多，而且評審論文人員不僅是著名數學家，還是淵博的學者。即使如此，在取捨方面仍不免失誤。雷利爵士——最偉大的數學物理學家之一——之子斯魯提（R. T. Strutt），在談到其父的生平時，曾說，雷利爵士有一次將一篇未署名的論文送請「英國科學促進會」發表，後被退回，認為是唱反調的怪人所寫。可是，在發覺作者是誰之後，這篇又被評為優異。雖然發生這種情形，但就整體來看，從前的評審人員大都才足勝任並有批判能力。此外，編輯人員對期刊刊出的論文品質，每引以為榮，力求保持優良聲譽，所以不辭辛勞，為收到的論文找尋夠資格的人士加以評判。評判論文也以對科學的助益作為主要標準。

事實上，研究之為主要或次要，頗難判定。費依泰（Francais Vieta）是最初教我們用字母，（例如在  $ax^2 + bx + c = 0$  式中的  $a, b, c$ ）代替各組數字的人。這一觀念現在看來是當然。但是，歷經二千年第一流數學創造之後，才有這一進步，在數學上，成為代數和分析所有證明的基礎。這一觀念實在和牛頓的任何重大成就有相等的價值。

研究的品質難於評斷和前曾說過大多數論文價值不高，兩種說法似乎不無矛盾。少數有價值的論文當然重要——像那些能解答困惑偉大心智頗久、懸而未決的問題。還有如若作者自己說出所得結果為何重要的理由，自較易評斷。費依泰引用字母代替各組數字，就曾說，現在可以區分數字代數和代數科學（這是用現代名詞來講）了。許多似少價值的論文裡，或許有一篇亦頗優異，但是如若其優點連博學的數學家都看不明白，只好受到不利的評判。

一些科學社會學家試圖對研究論文的品質加以衡量，他們採用的辦法是計算引用次數，即在某篇論文發表後，計算其後各方論文引用該文

的次數。爲達此一目的而發明「科學引證指數」並加應用。這種計數數目的辦法顯屬幼稚。極好的論文通常立即爲另一篇將其再推進一步的論文所代替。即使改進的只是很小的細節，但其後有關的所有論文引用的一定是後一篇論文。一篇合於時尚的論文，在多年之內常被引用。許多研究的新手，甚至犧牲真正創造者，而引證自己教授的論文，藉以邀寵。接受引證作爲衡量論文的品質，應先要求衡量科學家的真誠。

現時數學研究看起來令人印象深刻，形成一個廣泛發展的結構。最近研究工作，對原有各學科的性質描述得更明顯，同時指出有幾乎無窮途徑走向新的發展。抽象化和一般化將表面不相關聯的學科連接起來，使數學有某些程度的統合。將一些古典的困難定理，放在新的背景裡，至少由經過訓練的數學家看來，顯得更自然更有意義。數學現在多注意定性方面的特性，和古典數學注意運算及定量方面的特性，正好成爲對照。因此創造許多新學科，而將原有學科範圍內看來不重要的部份捨棄。我們不再研習歐氏「幾何原本」裡全部 467 項定理，以及阿波羅尼斯 (Apollonius) 「圓錐曲線」裡全部 487 項定理。

不過，批判眼光會產生不安和困惑。新的主題，一般化、抽象化、公理論、專門化的擴展，可能產生不費力的成就，但分散了對實質觀念更具體更困難問題的注意。抽象化和專門化拋棄實在界進入空泛浮淺題目的雲中去。對不跟隨流行時尚的論文過份輕慢憎惡，也就等於鼓勵沒有價值的活動。

爲什麼創造數學並探討數學？這一問題今天的數學家越來越不重視，也更不注意什麼是值得了解的，什麼是有益於社會的，以及爲何社會要支助數學家。當前研究最令人不安的一件事，就是研究生、新博士，甚至許多已有成就的數學家都不再問：我爲什麼致力於這項特別的研究？任何研究只要預示能有解答和可以出版，就認爲有價值。或許除了研究人員職業的升遷外，沒有值得讚揚需要達成的另外目的。一個問題如果確是一個「問」題，那就是個可以研究的問題，這樣就夠了，不必再問是否足有研究的價值。雖然很少有批評的聲音，不過，美國數學會及美國數學協會一位

離職的會長，曾經勇敢的反對現在很多研究。

所有學術領域裡，無疑的，都在做許多沒有價值的研究。不過，在數學方面，由於這一學科獨具的性質，無足輕重不具意義的研究遠更普遍，特別像現在流行的這種做法。數學原不論及實在界，所討論的是有限度的抽象。過去多少世紀，抽象來自實在情境，數學的主要動機為對物理實在界有更多理解。認識到探索數學本身的恰當問題，一定能直接或間接在科學工作上產生助益，數學家至少將一隻眼睛看着實在世界。但是，今天的數學家對做些什麼比對為什麼要做懂得更多。當前很多沒有意義的研究，從論文的引言就看得清楚。學生或教授先從查閱出版物，找研究題目開始，再攀附上去。許多論文開頭的陳述是，「X先生曾獲得下列結果……我們進行加以一般化，」或者說，「X先生曾考慮到下列問題……另一相關的問題是……」，其實可能這種一般化或相關問題都毫無意義。另一種常用在引言裡的說法是，「自然要追問……」，跟着是一個最不自然又牽強的問題。所以，結果是各式各樣沒有意義的論文。

數學研究也變為高度專業化，但其走向却是這一名詞最壞的一面。研究本是有奉獻精神的人，自願而誠摯的作為。研究是為知識上的興趣，所以，即使是小的成就，也都值得做。不過，在充滿各種期刊的溫室裡生長的研究，只供提升個人晉級，反而成為科學的拖累。知識的好奇和問題的挑戰，或許仍然提供某些動機，但是，出版、地位、報酬、得獎一如當選國家科學研究院院士——已成為目標，且不擇手段。需要可觀的背景知識，多年努力，並冒失敗風險的深一層問題，當然被擱置一旁，而容易着手幾乎隨即可獲解決的人為造作問題則受到偏愛。

上述對現代研究的控訴，可能使許多人覺得意外。真正的數學家當然是才智之士，自不會撰寫品質低劣沒有價值的論文。不過，現時以研究為生的人士其才智差異範圍，可從薄弱到優異。培根(Fraucis Bacon)在「新工具論(1620)」就探求使研究機械化的可能，因而受到嚴正批評。和他同時的伽里略(Galileo)，曾就他的成就證明研究所需原創性和偶發性的程度。培根可能確是過度簡化了研究工作，不過，他預期任何人，

即使是一無才智的人都能做研究的想法，却和現在數學研究的情況相差不遠。

博學的特魯戴爾 (Cliffard E. Truesdell) 教授，是多項應用領域裡的權威，在所著「自然哲學六講」裡，勇敢而譏諷的說出：

正如大學已從學問中心變成大眾的一項社會經驗，研究也從起初的使命感變成一種專門職業，再降低到成為一種交易，即使還未變成非法勾當。我們難於抗拒社會性大學和大量生產的研究。這兩者都有「用」，你看不是有人靠此為生嗎？——即使酬勞不一定很好。從政人員、律師、醫師、將軍、大學行政主管全都是謙虛的人，比大多數數學家謙虛。……研究已經做得過份。受着社會支配，每一科學教師轉變為一部科學製作的機器，首先忘記了為何要做研究的理由。研究本身並非處於「全福」的地位，其目的在於發現值得知道的一些東西。基於令人欽敬的自由主義，社會性大學宣稱任何受僱人員提出的每一問題，都無疑的合於作學術研究的對象。如外界有不同情的指責，就應勇敢的為他們辯護，使免受知識規律的任何約束。

雖然每一位數學家有自由追求自己喜愛的研究，但也確有責任產生有應用可能性的論文，或者是提供有高度美感、新奇方法、生動展望的論文，至少要能指出有利於研究的方向。可是，大多數數學家利用應用的可能性很難決定，美的感受要看各人愛好以此作為藉口，因而使得劣質論文淹沒了優良論文。當然，和過去一樣，只有歷史能判斷什麼具有永久價值，劣質論文將會消失無聞自是應得命運。不過，一時帶來的太多觀念，却成為今天妨害真正進步並難以克服的障礙。

現時研究對數學的進展有害或有利，並非我們主要關切之所在。我們進行調查研究的性質，是想知道這類研究成熟時，能否真如人所言，對各級教育系統有所改進。就讓我們跟着考查一下研究和教學的關係。



## 第四章 研究與教學間的對立

假如沒有大學部學生，這裏將像天堂一樣……  
不會浪費腦筋去灌輸笨頭腦。

史蒂芬 *Leslie Stephen*

大學的主要任務在實現兩項功能——研究與教學。不過，經費和設備均有限制，大學就以約聘研究教授辦法來解決這項問題。認為研究教授增進知識，將直接間接改進各級教育。此外，更主張研究人員實在就是優良教師。也肯定反過來的說法：要成為優良教師一定先是優良研究人員。因而約聘、晉升、永久教職、薪給完全依據研究的地位而定。

雖然也有理由相信大學為訓練未來研究人員所提供或應提供的大部分教學任務，要由有研究能力的教授擔任。可是研究教授教書並不行。在數學方面，這點幾乎可以確定，其他學科方面也有同樣情形，即直接的對立存在於數學與研究之間。

有利於研究人員的一項論點，是說他具有豐富知識。不過，所具有的究竟是什麼知識？幾乎可以確定的，他是一位專家。專才就像礦工，從不四顧景色，只在挖掘僅容通行的坑道以進入礦內，去探究一小支金礦脈，而實際可能發現那只是錫礦脈。這類研究越走越窄狹，並非越趨寬廣。教授進行的研究，和他在大學部甚至初級研究所要教的毫無關係。一位研究抽象代數某一角落的專才，或許對非歐幾何一無所知。事實上，創造性



的研究人員很像一個微小範圍中的技士，熟練而所知無多。專門知識和教授沒有關聯，也不僅在數學方面，英文教授專門研究語言學，或包法利夫人愛情生活，並不因為這類研究，他就能教好初級作文或文學概論。

數學中有很多研究並非很狹窄的，譬如抽象化和一般化的一些就很寬。可是，除了增加很多並無價值的資料外（見第三章），這類研究內容遠比該教給學生的要複雜得多。學生必須對較具體的數學已有很豐富的知識，方能領會抽象化和一般化的意義。不幸，研究人員心中太過喜愛抽象化和一般化，因而總是樂於立刻衝了進去。

研究教授的知識，其價值不無疑問還另有理由。今天的數學研究大都屬於「純粹」，和現實世界發生的問題並無關聯。但是絕大多數學數學的學生（約佔95%）預備將來做物理學者、工程師、經濟學者、保險統計人員、統計學者，以及中小學教師。典型研究人員的知識，對這些學生並無用處。

除了上述各項理由，足以貶低研究教授具有的知識外，還有一項理由和數學教育特別有關係。數學知識有累積性，像代數有賴算術，微積分有賴代數，微分方程有賴微積分等，所以研究人員的知識，只有對他的研究範圍已先具備可觀的背景知識的學生，方能獲得。

支持研究人員的一項常用論點，是說他顯然深愛其研究科目，會將這種熱誠傳遞給學生。不過，要知道現時的研究連專門職業都說不上，更像是一種交易——前引特魯戴爾教授所說，更早還有巴斯卡（Blaise Pascal）也這樣說過——很多人從事研究僅是一種謀生之道。實在由於大學強調研究，成為個人發達的大道，許多教授才被迫走上研究，正像役男受召，不問願否作戰都要加入部隊一樣。研究是高度競爭性的活動，不是為喜愛一項工作本身或為所愛的人而做。某位系主任對同仁講的話，可以作為出版壓力的例證，他說：「一日一定理，就會升級和加薪。」

深入貫注於研究的狂熱教授，幾乎潛意識的有激發對其專門科目產生興趣的使命，因而以難以趕上的步伐，迫切的將學生帶進這一科目，不惜放棄原更有價值的基本教材。他企圖訓練專才，不過這種訓練幾乎對一切

學生都無助益。

此外，爲了在他的領域裡必能知名出衆，從事的活動就不能不賣弄。因而將研究結果在無數的會議或專家大會上公開宣布並爭取獎助金及顧問工作，這樣除了增加收益外，還有助於聲望。爲了引人注目，更在專門學會裡謀求擔任職務。一切這類活動都在提高其商業價值，進一步有助於個人晉升。但是對學生的責任又如何？這往往放在最低層來考慮。就連對學校的忠誠也不一定重視：因爲研究補助費是由教授個人商談而得，一旦轉移到另一學校也一起帶過去。總之，他是市場的公民。教授的良心責任並不比任意挑出的一群普通人高。

一般人想到研究，會認爲是紳士式的活動，本公開、公正態度進行，致力於追求真理。實際上，研究是攸關生存的劇烈戰鬥。因爲一切以出版爲優先，研究人員自然儘快推展其工作，否則會被另外的人打倒。英國最偉大的物理學家之一勞塞福德（Lord Ernest Rutherford），在1902年曾說：「我一定要不斷向前，因爲總有人和我跑在一條路上，我必須儘快出版現在研究的結果，以免落在人後……。」繼續保持在研究領域文獻上領先，研究人員要花費極多時間和精力。競爭的緊張甚至迫使研究人員採取一些商業上惹人討厭的手段，例如，不肯說他現在所做的工作，也不願洩露已有的部分成就。爲提前出版，研究人員覺得就是不完整的結果，也要先行發表，即使自己完全知道或只要再努力一點，就會產生更好的論文。研究要求付出全部心力，在教學上只好敷衍或忽視。

大學強調研究，特別困擾新來的博士。他們剛從被灌輸的數學的純粹中脫穎而出，剛從某些專門科目研探兩三年的深淵裡冒出頭來。頒授的博士學位並非教師證書，只是不再被培育的正式印章。隨即接受三年約聘，期望能在這一段時間裡從出版物上表現卓越成就。不過，這一段時間正是教學工作的開始，必須費時準備教材和多學施教技巧。這樣服務兩年後，會收到是否重新換約的通知。事實上，就是真正利用這兩年，也無法表現研究能力。因爲各種期刊擠滿了稿件，即使可以接受出版，也要等好多月才會交付審查。在受聘之前，這位新教師的唯一研究，就是在教授指導下

所提出的博士論文，所以他面對的任務十分艱難。縱然他任教的大學認為他教學優良值得支持，不過新手不能期望由這項能力就出人頭地。面對這種對立，唯一的人性反應就是出版，然後不管學生死活。

期望新博士只能經由出版以獲得續聘和永久教職的辦法，如若認為這種要求有理，那麼，從愛因斯坦的實例，就可見其愚蠢。獲得瑞士蘇黎世工技學院文憑後，愛因斯坦只想在德國大學覓一助教位置，以便修習博士學位。不過，由於他沒有出版物以表現其研究能力，只好到伯尼的瑞士專利局任檢查員之職。數年後，在1905年，他發表了三篇傑出論文，其中之一即為特殊相對論。再經六年，才在布拉格的德國大學首次得到大學教職。

最近長春藤聯盟學校的一位哲學教授，對要求新博士必須做研究一事，加以嘲笑，他說：「大多數偉大哲學家在『空虛』大學都得不到永久教職，因為他們的重要著作往往在四十歲以後才出版。康德（Kant）達十二年之久沒有任何論著——若照現在的制度，他一定被當作譏笑對象而遭罷黜。」

不問如何不合理，還得要求青年人努力表現研究能力，只要看一下專門期刊登載的徵求人才廣告，立即可以得到證實。一所有聲望的大學徵求助教授廣告所列條件為：已有高水準著作出版，願意繼續致力於研究，應徵者還要提出在大學部和研究所教學優良的證明。申請助教授的青年男女，最多只不過有兩三年資歷，何能要求具備這一切條件？

常見的典型廣告，主要內容略如下述——徵求：新博士具助教授或以上資格。必須證明有研究能力。履歷應列明出版物。請向諾伯教授申請，內華達州，值得多「卓越」社區學院。（距拉斯維加很近待遇可迅速增加。）

或許有人想到系主任和系內新博士時常接觸，應不必從出版物判斷其潛力。可是，辨識才能的能力比做研究的能力更為罕見，很多系主任都沒有。他常和同事們商量或請教校外專家，不過這些同事可能同樣沒有判斷能力，而校外專家可能心懷偏見，新人在狹窄的學術圈外很少有人知道。

教學與研究間的對立，再考慮到教學的要求就更明顯。首先想到的是知識的廣博程度。學商的學生、未來的中小學教師以及學社會科學的學生，現在都要修習數學。學工程和物理科學的學生需要學習的科目，也和造就純粹數學家的不同。要求未來工程師學習嚴謹的數學基礎論，正如要求未來的牙醫學習古代英語同樣愚蠢。即使到研究生階段，大多數學生並未準備好做數學研究。教授應了解什麼教材對他們是重要的，再以適當課程和其配合。但是，研究教授不能專心致力於這一方面，因而只教一些他自己覺得輕鬆的教材。

究竟優良的教學需要些什麼？當然，先要知道班上學生的知識背景。數學，特別是在較低層次，是循序漸進的科目。要從一階段教育終止的地方，作為新課程的開端。要了解大一學生進入學院時的程度，就需知道高中教的是些什麼。由於新數學運動的影響，高中已經更改課程表，因此，這一點現在特別要做得認真。但是，研究教授不想找麻煩去查考高中所教的課程。

優良教師要設法了解各個學生。可以要求某些學生解答較難的問題，或給與額外作業。對較差的學生只要求做適宜於他們知識背景的課業，如果超過他們的能力將會使之氣餒。教師充分了解他的學生，就能不靠考試來分別學生的等級，儘管為了其他理由，可能還是要考試的。

良好的教學也應滿足學生心理上的需要——給某些人鼓勵，給另一些人壓力，也給從前因不良教學而失敗的人信心。優良教師也要熟悉困擾學生的另外一些心理上問題，在學習方法上提供忠告，在個人接觸時給與激勵。為了有效的了解學生，教師自己也應容納青年人的看法，成為他們世界的一部分。

最近一項研究，要求兩百名學院二年級學生寫二百五十字短文，描述曾見到過的最佳數學教師，並說明推選的理由。大多數學生選出的特點，為「對學生表現真正個人的關懷」佔百分之七十八。次一最高的特點，為「施教引起全班興趣」只佔百分之五十三。列為第五項特點，為「熟習所教科目」只佔百分之三十四。最後一項數字之低，可能由於這是每個學生

對教師起碼的期望，所以許多人就未曾提出。

教師要經常要求學生提出問題。可是，有些研究人員爲了不打斷事先準備好的講授，或者不想牽涉到另外事情，很討厭學生在班上提問題，他們準備好「十全十美」的講授，認爲插嘴是僭越或愚蠢的表現。

要適切的表達教材，優良教師應知道青年人如何思考。某一特別抽象概念，能否對大一學生成功的表達，或者應否延後到三年級時才提出？對開始學習微積分的學生，就從嚴謹方式着手，是否有效？在準備講授課程時，教授要在好幾十種教科書中選用最適合的一種。這種挑選頗費時日，還需考慮何種程度的學生可以接受。即使教授用了很多時間，如所作抉擇並不明智，可能選用的教本對他自己很明白，但因解說不當，反而過份加重了學生的負擔。他也要按照教本的章節，有效的表達各種觀念。

通常爲了配合學生知識背景的改變，或者介紹新的應用範圍而修改課程表，會增加教師的責任，例如，發明電算機並不斷增加用途，就需變更一些課程以有效的運用這項設備。爲了補救進入學院學生知識的不足，開設特別課程，是現在一項重大問題。計劃一項新的或需修改的課程，是優良教師費時極多的任務。

優良教師還需有觀察入微的能力，能知道學生在學習這一階段的艱苦。教授僅熟知所授教材並不夠。通常反而因太熟悉教材，忘記或疏忽青年人在學習基本觀念時遭遇的困難而認爲這只是枝節置之不理，當作問題並不存在。專心注意的教師也能看出發展較慢的學生，並承認思想較慢的人並不一定是思想貧乏的人。

最後，教學上極重要的問題是激發學生學習的動機。許多愛好不同或價值意義不同的人，可能不喜歡數學，這一層很多教授都沒有想到。學生要知道爲什麼要學數學，或者某一特定課程爲什麼重要，並不能只因爲教授喜歡就學。

即使到較高層次，教授已認定學生愛好數學，如若只講授定理而無適當動機，將使這一課程成爲定理、證明、運算的無意義組合。大多數教授對數學深有興趣，所以不了解需要引發學生的動機。事實上，這些教授最

好教已有充分發展主動能力的學生，不必再增加其動機。教授最大快樂是有修習博士學位的聰明學生；他喜歡吹噓聰明的學生，好像是他使學生變得聰明。

提供有效的動機是非常花費時間的事情，還要嘗試和實驗。更應備有廣博的知識，這點注重研究的教授沒有也不想有。從實際問題，大都是物理問題，提供動機非常自然，並且從歷史來看也很有效。不過，由於數學教授拋棄了實在世界，同時和科學分裂，也就影響到教學方法。

優良教師要參與學院事務，如輔導學生加入教師委員會，經由教務會議和行政部門合作，是每一位教師的義務。但是，研究人員不肯屈尊使自己涉及大學部學生，甚至研究生的這類事情，只因為需要和其他各系或行政部門尋求合作。這類責任就落到專任教學的教師身上，有良心的教師從不規避責任。

總之，教學是專心一致的事業，只有志願決心奉獻，經由累積經驗，精通這種藝術的人，方肯就任此職；無疑的，這是投入整個身心和時間的辛勞工作。

從上述所有考慮，顯示研究與教學的要求大有差異，但尚未包含另一重大因素，即研究人員與教師的個性。一位教師要能傳播知識，數學研究教授是否確有這項能力？一般講來，他們多好內省，是內向性的，和人相處覺得不自在，常躲避個人的接觸，喜歡專心獨自思考。他們所以選擇數學研究，部分由於數學本身不涉及和人相處的複雜問題。我們可以引證羅素的話：「遠離人的激情，甚至遠離引人情感的自然事實，歷經多少世代創造出一個有秩序的宇宙，作為天生的家園讓純淨思想居住其間。這裡，至少使更崇高的情操，可以逃離真實世界，免被淒涼的放逐。」他在自傳裡，又說，抽象思考泯滅了人性，而進入自我本身。他也承認其所以進入數學，「由於數學不涉及人性」。數學成爲一個避難所。研究，在許多領域裡，本是孤寂的工作，在數學方面，好像成爲缺少熱心和興趣的人安息之所。這樣的人會和學生成功溝通嗎？

優良教師要精力充沛、語言清晰、受人喜愛、真誠平和、熱心親切，

對學生深具同情，對人和對觀念有同樣的興趣，甚至要是一個好演員。他不僅有活潑個性，也有高尚氣質。他應關心青年人，將他們的一些問題當作自己的問題。一位主修英文的學生如果反對學習必修的數學課程，那麼他總是有道理的——至少由他看來。教師就有責任向他說明這項課程對接受高等教育的人一生的價值。

許多教授希望成為優良教師，並認真去做，顯然他們相信希望就能實現行爲。不過，希望可能是行爲之父，但不能不經過受胎、懷孕、分娩。這些需要理解、時間、精力以及特別專心用在優良教學的各種要求上。這是藝術，很多要從學生身上才可以學到。如若能使學生顯示領悟、興趣，甚至激勵、滿足，主動去學習更多，並對用以啓發思考的問題產生回應——達到這樣程度，教學可以算是成功。教師更當注意，假使在某些方面未能達到預期，即需改進以補救缺失。就是最願意以學生為中心的研究教授，也無法做到上述要求，因為他們自己的研究工作，要保留很多時間、思考和精力。

研究人員不少是和善、有禮和好心的人，但也難於和學生接觸，有些甚至怕面對學生。這些教授通常頗有良心，慎重準備教材，細心寫在黑板上。學生上課時間用在抄下教授所寫的。這樣教授顯然太超塵出俗，沒有聽到過有複印機。

研究人員常受讚譽，認為不僅具有才能有所創造，還更有天賦特出智慧能面對任何情況作出明智判斷，獲得優異成就。對數學而言，是否有一種特殊才能，至今還沒有任何客觀證據可以解答。如說有數學的遺傳因子，那是決不可信的。解說才能問題的意見，以柯倫特（Richard Courant）提出的最為著稱。柯倫特在希特勒以前德國的哥廷根大學，任世界聞名的數學系主任。後來又將美國一處沒有特色的數學系改變成全國著名的數學系之一，甚至可以稱為處於領導地位的數學系。沒有人比他知道更多的本世紀數學家，並和他們交往密切，在問到是否有一項特質，稱為數學才能，他的回答是「沒有這樣東西」，更加上一句說：「與其問數學家具有什麼特質，不如問，其他的人具有而數學家缺少的是些什麼特質。」

可能這一問答解說了研究人員是否具有特出智慧的問題。

雖然學校行政主管可能承認研究與教學之間有對立，但又以另一項理由，支持以研究作為教授地位的條件，他們說原創性研究是卓越才智最可靠的證明，也是心智活動得以繼續最可靠的保證。暫先不談原創性研究品質的評判問題，先要問一下，卓越才智和教學有什麼關係？一位真正卓越才智之士，可能太高過於當時所教學生的水準，而不能了解學生的問題和需要，即使他願意去瞭解。

至於說到原創性研究是心智活動得以繼續最可靠的保證，而研究人員却很多在三十歲，更多在四十歲就衰退了，大都變得沮喪、愁苦、甚至乖張。可惜沒有衰退的研究人員共有多少的總計數字，也沒有重視數學而仍然在各種心智活動方面活躍者的統計數字，可以兩相比較。但確實有一些研究人員筋疲力盡。雖然真實性尚未確立，不過，一般都相信科學是青年人的競賽。理論物理學家及諾貝爾獎得主，狄雷克（P.A.M. Dirac）曾帶着玩笑說：

年齡真像高燒後發寒，  
物理學者莫不驚怖。  
一旦過了三十歲，  
靜寂活着實不如死。

教授保持智力活躍當然很重要，但不需只靠研究，後面將討論到另一些途徑。從現在的研究性質日趨狹窄來看，即使研究教授仍然活躍，對學生又有什麼好處？

很多行政主管和系主任認為總要有某些可據以選擇的條件，研究可以計量而教學則不能，所以最好不要冒險約聘專任教學人員。不過，這種論點其實靠不住。我們曾經指出（見第三章）對研究品質的高下幾乎無法作合格的研判，而事實上，當前大多數的研究都沒有什麼價值。研究的評估演變成爲只計算出版物的數量，而不問其內容。只要同行肯接受，一位研究人員幾乎能將任何論著出版。至於同行則一定會接受，因爲他們也願意得到相同的待遇。系主任和行政主管所說的研究可以計量而教學則否，



真正的意思不過是計算出版物的頁數。這個方法的可靠性，就像從大學經費的總支出，來決定這所大學是否達成了作為教育機構的任務一樣。牛頓在出版一篇論文後遭受批評，就立誓決不再行出版，不知道行政主管如何評判早期的牛頓？

可怪的是：即使規模頗大的學系，對研究的評估也難有把握。每個人都是自己領域內的專才，對其他同事的工作，即使有所知也真正所知無多。就是經由委員會來評估也不見得可靠。任何參加過委員會的人都知道，多開列幾個人名，不過是為了分擔責任，結果在委員會裡每個人都希望其他的人去做事，但沒有一個人有所貢獻。友誼、派系、妬忌以及對某一研究領域的偏愛、背後閒言或零星消息就作了決定。許多系主任或委員會以各種理由約請相關領域的專家來評判系內人員。我們已經談過（見第三章）審核過程的缺點，同樣也會發生在由同行來評判已出版的研究。此外，由於時尚所起的作用，使有深度的研究人員，因為在尚未流行的領域裡工作，而得不到好評。數學家對新觀念的辨識和接納，並不比居民樂於維持現狀的小城政客更好。褻瀆部落偶像不能不受懲罰。

教授除了所屬系的評核外，有關晉級和永久教職的決定，雖經系提名通過，仍需教授團的委員會批准。由於今天研究的專門化，委員會中甚至沒有一個人了解送請評核的研究。因而，教授團的委員會還是憑出版物的數量。

如何評估教學？學生可能是評估者。不過，學生尚缺乏經驗，成熟的評估需待多年以後。且學生的需要和要求各有不同，無所謂的學生重視的只是趣味性，對像演員的教師會評價很高；平常但用心的學生對按步就班施教和表達清楚就頗為激賞，但對教授忽然閃現的傑出意念，反而無法把握甚或感到困惑，這些學生只想知道做什麼以及如何做。真正聰明的學生常能自行閱讀，所期盼的主要是正確的指示、較深的見解和有挑戰性的問題。一班中顯然包含各式學生，所以對教授的評估必然會有複雜的等級。此外，學生的評估會受到本身所獲分數的影響。如若被迫修習不喜歡的課程，最後一定對教師有反感，由學生評估雖不應忽視，但也不能作為決

定教師成效的主要依據。

當然，教學很難評核，並且優良教學表現有很多方式。一位教授能激發鼓舞學生自動學習——即使他對學科本身說得很少，也沒有什麼系統——一定是好教師。經由冷靜而審慎解說，幫助學生精通教材，從推測學生的動機，給與他們學習的信心，是另一種優良教師。還有一類教授，在教室裡表現並不很成功，但能和學生建立親切的個人關係，用很多時間解決個人的要求，使每一學生覺得他是朋友和顧問。

系主任在評估教師方面有許多事好做。他應當經常和教授討論所教的課程，選擇什麼課題以及如何表達這些課題。系主任應知道教師的品性和資質，對教學的興趣，選用的教科書，考試的方式和內容以及能否隨時和學生接近。教師也可以顯示自己的見解，如編寫優良教科書、解說性的論著，或對某一課題發展一種更好的教學法。

可是，教學才能沒有客觀的，當然也沒有數量計測方法。所以和評估研究一樣，要靠評判。事實上，人所作的一切重大決定，均靠評判。大學行政主管如不能實施合格的評判，就不應該占據有虧職守的位置。本世紀初，詹姆士(William James)曾說，大學教育的社會價值是：見到一個好人就能辨認出來。這項能力，大多數行政主管並未具備。在決定教師優良與否時，要求提供推舉函——通常由評判力並不比行政主管高明的人所寫——以及出版物清單。雖然實施真實評判以代替依賴無作用和無意義的數據勢在必行，可是許多行政主管却不願或不敢實行。評判可能發生錯失，不過，我們期望於良好行政主管的，只是對的成份能佔大多數。

評估教學最可悲的事實，是大多數行政主管對同事和學生認為優良的某一教師，不肯重視。教學在大學裡真算不上什麼。當然，行政主管會否認這種說法。

就一切事情來看，研究與教學的真正性質和要求大有差別，所需的個性和才能也大不相同。只有極少的人具有過人精力，能在這兩方面都表現優異——至少在一生的某一時期內。一般說來，教學的優良成就和研究的努力成反比。當然，有些研究人員也願意教學，不過，有無這種能力是另

一回事。他們的智慧可能已在研究中用盡了。

任何人如果想編列統計人數，提出既是研究人員又是優良教師的數學家，必定是一件艱巨而又極易評判錯誤的事情。雖然如此，通常認為最偉大的三位數學家中的兩位所提供的相關個案歷史，就頗有意義。牛頓是劍橋大學教授，以拙劣的教師著稱。有時，竟無一人上他的課，即使有人上課，也很少聽懂。不過學生少他並不煩心，只關心從研究創造所得的讚譽，幾近偏執狂。

高斯，雖說不是拙劣教師，但對教學並不重視，而且親口承認。1802年，他寫給業餘天文學家兼醫生奧爾伯（Wilhelm Olbers）的信中曾說：

我真討厭教學。對教授而言如果僅教這門科學的初級課程，那是一項無聊的工作。只有少數學生能跟得上，而其中的大多數只是不停的收集大批資料，只接受到一半教育。至於極少數有天賦的學生，根本不願受上課聽講的教育，要自己去修習。這樣勞而無功的工作，損耗了教授寶貴的時間。

高斯只吸引很少幾個學生上他的課，他的同事謝伯特（Bernhard Friedrich Thibaut），雖對數學沒有什麼大貢獻，但却有上百的學生。高斯年復一年講同樣的課題，極少修改。

第三位「偉大的」數學家，是亞基米德（Archimedes），他並非教授。他生活的時代，教育方式和現在大不相同，所以不能作為有關的個案。

近年來，很少有偉大的數學研究人員以書面表達對數學的態度。只有這世紀上半期英國的重要教授之一，哈代（Eodfrey H. Hardy）曾經這樣做過。在他著的「一個數學家的辯白」書中，曾說：「我痛恨『教學』，不得不儘量少教。我做的教學工作，幾乎全是對研究的指導。我喜歡『演講』，對極為能幹的班級講說很多，我常在閒暇時間從事研究，這是我生活中長期的重大快樂。」這就明白，為什麼哈代的書題名為「一個數學家的辯白」。

在我們這一時代，研究人員對教學沒有興趣，已成公開事實。大學設

法吸引這些人，除金錢外，還允許減輕教學負擔——越輕越好。大學行政主管知道研究人員不願教學，在少數教學鐘點裡，要給他們特權，可以利用其中一些鐘點講授他們各自專門科目的課程或討論會。許多研究人員坦白說：「如果沒有學生，大學真是一處好地方。」此外，還有很多人表明對大學部學生教學的輕視。在晚間社交集會裡，常聽到有人在抱怨，他們明天早上要上大學部學生的課。他們看不起專任教學的教師，也認為學生笨拙不值得重視，上這些學生的課真是屈尊降格。這些研究人員或許了解理想子環的數學理論，但一定不知道教學的理想。他們機械式講說老套方法，終於面對了學生的厭惡和困惑，這本是必然的結果，反指責學生沒有興趣。事實上，不感興趣的是教授本人，不斷的以同樣老套方法施教，從不肯想一想教材應如何表達。不可否認專事教學的人，也有人在將學生趕出教室的速度上名列甲等。一個惡劣的教師似乎只是小禍害，但終其一生就造成大破壞。

有人說，自尊心和同行團體的讚譽是有助於將研究視為崇高的兩項因素。達爾文（Darwin）確曾說過：「我喜愛自然科學……最大的助力是爲了要得到博物學家同行敬重的決心。」不錯，科學家自畢達哥拉斯（Pythagoras）時代起，就喜歡同行團體的讚譽。至於數學家的同行，自然也是同樣的數學家——這一團體因受大學聘任制支配只承認做研究有意義。假如鼓勵同行團體對教學同加讚譽，事實上也能辦到。無論如何，自尊心和同行團體的贊同，並不必然趨向狂熱的出版那條路，因爲，真正的自尊心建立在實在的成就，即使要費十年時間達到也值得。

從研究與教學要求的對立來看，負責人士如何能繼續肯定研究教授自動會成爲優良教師？以及優良教師一定要認真從事研究？研究人員不相信他們不是優良教師，這種想法是可以諒解的，因爲那會傷害到自尊，而他們的自尊已經達到自負自大的程度。由於在自己研究範圍之外無所知，無怪乎坦然接受上述的教條。如若在一門課程結束後，要求學生填一份調查表，就下一問題劃出一項：這門課程的教學是(a)優(b)良(c)可(d)不好(e)惡劣，所得結果將使他們大爲震驚。不過，由於他們對自己的教學能力深具信

心，自然認為不必調查自己的成效。

有人或許想到，系主任對學生負有責任，應當有所回應，不過他們並不這樣做。自從系主任急於表現能建立及保持研究力量以來，就偏愛研究人員。所以系主任也以學生為犧牲。許多系主任偏愛研究人員，由於他們本身也只知道研究，潛意識的儘量找合乎他們自己意象的人。至於他們不懂的教學就被認為不重要。

更出人意外的，行政主管一無證據，就接受這類笨主意。他們的責任應同時照顧研究與教學兩方面，應當了解研究人員是否也能滿足學生教學上的需要。甚至在中等規模的大學裡，行政主管和各系活動也相隔很遠，即使知道應當關切，但無從評核教授的品質、真正貢獻的程度和性質，以及教學成就的優劣。他們只好專心於控制預算和維持規章。院長或副校長所做的許多事，一位優良會計員也能做得很好。大學行政主管所用的人，大都在盡力推動他們所不了解的事情。對教學與研究，他們一無所知，只能重覆照着曾經聽過的話去做，而行政主管也覺得沒有必要改正他們的想法。

許多行政主管也明白研究和教學直接對立，但認為研究應當居先。為什麼？因為行政主管真正追求的是聲望，偏愛任何建立聲望的方法。在五十年以前用的方法是：爭取出身社會高階層的學生；而在今天的世界裡，就以研究為媒體。只有學生才欣賞教學，可是，他們的意見在成人世界裡算不了什麼，所以教學就不受重視。另一方面，研究人員的出版物，却能使他們的大名和所屬的大學獲得知名度。研究被認為——當然是從事研究的人——天才的標誌，其份所應得的光榮，反射到主辦的大學上，成為大學世界的貂皮大衣。研究人員得到諾貝爾獎、專門學會獎、選入國家科學研究院，以及其他榮譽，也為約聘他們的大學建立聲望。在「美國的大學」一書中，巴森（Jacques Barzun）教授為大學聲望提供了下列嘲諷性質的公式：

$$Vip = \frac{2P + 5n}{f}$$

式中  $Vip$  指「明顯的聲望」， $p$  指普立茲獎得主人數， $n$  指諾貝爾獎得主人數， $f$  指教授團總人數。即大學明顯的聲望等於兩倍普立茲獎人數加五倍諾貝爾獎人數，再以教授團總人數除之，以計量大學的聲望。對數學家而言，這一公式當然不很適合，因為普立茲獎或諾貝爾獎均未包含數學家。〔根據 1976 年十一月二十一日紐約時報雜誌所載拜婁 (Saul Bellow)，1976 年諾貝爾文學獎得主的一篇文章，其中引用其妻，西北大學教授亞力山卓 (Alexandra) 的話，說諾貝爾將數學家排出獎外，因為其妻從前的愛人是一位數學家 (編者按，應該是女朋友嫁給一位數學家)。〕不過，可以選入國家科學研究院或在專門學會任高級職位等代替上式中的兩種獎。問題的重點，不是這類榮譽是否應得 (參閱第十一章)，大學只是想將得主大名列入學校文獻以資誇耀，或者在報紙上登出五行的報導就足夠了。顯然行政主管尚未發覺建立聲望更有效的方式就是委託麥迪遜街的廣告公司，但不久的將來，無疑會這樣做的。

大學不受約束的求取聲望，並不完全依賴研究。一位教授若是一項大計劃 (例如太空探險) 的首腦；或者常出差到華盛頓；或任何行動都受到報紙注意，他在教授團的地位就和最優秀的研究人員一樣。同樣的，政府的高級官員，也有某些辦法列名教授團內，雖然他們對推動大學正當活動一無所為。

有大量證據，說明大學爭取的是聲望而非品質。Y 大學已有很好的數學系，還是向 H 大學 A 教授提供很高薪資，請其離開 H 到 Y 來。不問 A 教授正在做的是什麼樣的好工作，在 H 或 Y 都一樣能做，變更地方對群體並沒有好處。可是，如果 A 獲得聲望，好處自然加到 Y 上，這就足夠使 Y 聘請 A。假如，A 的科目具有基本重要性，沒有人可以教，或者，一所學院決定增設研究所，要聘請研究教授，當然這類約聘是有理由的。不過，通常並非由於這類合理的原因，反而多是為了獲得或提高聲望。大學約聘教授的方式像有些人選擇太太一樣——他們想娶一位旁人會讚美的人。

力求聲望的證明，幾乎處處可見。一位大學校長在以正式身份作就職演講時，面對教授、校友及大學的友人，一開始就提到某些諾貝爾獎得主

、國家書籍獎得主和其他著名人物都是大學的人員。這樣的開場白顯然想加深聽眾的印象。在全部演講中，這位校長完全沒有提到在教學功能上有什麼值得注意的特點。最可笑的，這所大學將退休年齡降低為六十五歲，結果解聘一些很有能力的教師，但同時繼續聘請超過六十五歲而有聲望的外面人。

大學為什麼追求聲望？主要的理由是錢。行政主管最重要的關切是錢。我們已經注意到，研究人員吸取政府和私人基金會的錢——跟着又用來吸引更多高價的研究人員。由於學費佔大學收支很大的一部分，私立大學所以要爭取學生。學生因受父母的力勸，也喜歡進入有聲望的大學。州立大學為了向立法機構要求更多的錢，也在爭取學生。此外，還有無形的因素，例如，大學裡推動工作的人員，會因大學聲望而提高各人的地位。正如多年前，威卜蘭（Thorstein Veblen）所說：「業務人員接管了知識的追求」。甚至教授，原本已經完全專心於本身工作，也會接受在更有聲望的大學擔任較低薪資的職位，只為能在聚光燈下顯現自己。

雖然渴求聲望是大學多數活動的背後動力，「研究」却是社會認可的名詞，因此研究遂成為獲得及保持聲望實際有效的方式。所以，大學行政主管充分知道在講演和論著裡常提「研究」一詞，其實只是代表他們真正心意的一種漂亮說法而已。

大學力求聲望，使得教授處於不正常的地位。原本受聘擔任教學，但被要求做研究，如能帶給大學以聲望，就會受獎，而教授也就照着去做。即使在研究方面確屬平庸的人，也堅持以研究成就去鞏固他們的資格，其原因部分由於他們知道研究比其他任何活動更受重視，部分由於不肯承認自己的研究並不重要，他們仍然希望所寫的論文表現卓越，而不願意在教學以及大學和系裡有關事項上盡點心力。另有一些人則不惜一切犧牲，只想在大學行政當局重視的領域裡成為知名之士。

要在教授職位上出人頭地，根據1964年「美國政治科學協會」會員對調查的回應，條件簡列如次：

項 目	等級
出版物的數量	1
獲得博士學位的學校	2
和各方有良好聯繫	3
獲得研究資助的能力	4
出版物的價值	5
所著教科書的權威性	6
幸運或機會	7
最初專任約聘的學校	8
自賣自誇（厚顏吹噓）	9
教學能力	10

美國大學過分強調研究，是比較新近的現象。我們提過（第二章）艾略特在1869年曾表現憂懼，即研究將貶抑教學。在十九世紀後期，艾略特所說的危險不無誇大，因為當時美國的研究還在幼稚時期——他後來還承認大學一定也要支持研究——但是他的憂懼最後終於證明有其理由。

從一九四〇年代後期開始，大學要求研究，並將研究作為擔任教授職務的唯一評核標準。這種偏愛使人想到齊斯特頓（G.K. Chesterton）的話：「老天爺！是醉了還是醒的。」研究的狂熱已經造成學術界不公平的晉升制度、大學部學生教育的反常、以及對教學的輕視和逃避。麥拉漢（Marshall McLuhan）就曾這樣說，媒體實在就是訊息，大學數學教育的媒體完全不能適合於所傳播的訊息。或者，像另一位教授在「美國社會學協會」最近一次集會中所說「教學表現了高等教育裡巨大的真空。」





## 第五章 大學部學生教學的貶值

他們全爲自己舖張盛宴，則所食是罪，所飲是罪。實際上，教育並不像某些人公開讚揚的那樣。

聖者之歌 *The Bhagavad-Gita*

研究是花大錢的事，研究教授要有高薪，又不能要求擔任較多教學鐘點。他們主要是教研究生課程和主持討論會，由於學生無多，學費收入太少，不足支付所需開支。在需要實驗室的學科，費用更大。教授進行的許多研究和學生完全無關，即使政府和基金會的補助金確已分擔某些用費，仍必定要靠大學整體來支持。

如果和研究相對比，辦大學部教育頗有收入。私立大學的學生學費很高，而公立大學由州或市撥發的經費加上學費，也是相等的。學生人數很多，所以從大學部學生得到的收入很大。既然這樣，爲什麼不把從大學部學生收到的錢，轉移到支持研究生教育和研究方面？現在的大學正是這樣在做。

用來「應付」大學部學生的錢很便宜——事實上，說不上「教學」——大學採用兩種手段：人數很多的大班講課制以及以研究生代替教師。大班講課通常由研究教授擔任，學生可能多達千人。還有少數大學用閉路電視教學，多到兩千至五千學生聽一位教授講課。

大班講課制應加反對，至少就數學而言，理由幾乎顯而易見。教學不

僅是宣讀教材就了事。學生的知識背景和能力各異，有效的教學需要知道每個學生的困難所在，並能解答每個人提出的問題。問與答的重要，遠超過將教科書中可找的教材，或寫成講義複印分發給學生手中的教材，再聽教授重述一遍。此外，數學家特別宣揚要教人思考，這必須要用啟發性問題誘導出回應，鼓勵學生提出明智見解，闡釋學生提出的錯誤意見而不損及其信心，從不斷探查其思考過程導引到正確證明或解答。顯然，這些都是大班講課所無法辦到的。

為大班講課辯護，行政主管喜歡提出的一項理由是：可以讓衆多學生聽到名教授講課，這等於說只要聽就行。低沉的聲調，或優美的動作，能使學生聽，或許還保持清醒，但這不一定就是學習。數學的課，講得再好也只是有系統、完整、正確——但單調。通常講課，就是不是自言自語，也像獨白。教學需要的是對話。講課制的無用，懷海德（Alfred North Whitehead）在其所著「教育的目的」中，有很率直敘述，他說：「如僅係傳授資訊，自十五世紀發明印刷術以來，沒有一所大學有講課制存在的任何理由。」講課制是一切失敗後的最後手段，實際上是逃避教學的藉口。

有些大學也必認大班講課不盡適當，謀求補救。將學生分成小組，每週以一，二小時跟研究生研討。由研究生回答問題，查看練習作業，通常還有臨時測驗和批給分數。如果研究生真具備從事這些任務的能力，足以補救講課的失敗，那麼大班講課大可從省。可是，指導學生自己思考是一種藝術，只能從多年經驗中學到。認識心理上的問題並提供勸告，必需人格成熟。這些都是研究生所沒有的。他們更沒有足夠時間了解當前教育的趨向，也就不知道學生能夠具備或無法具備的背景知識。此外，他們當然格外關切自己修習博士學位的進展，幾乎一定儘可能用最少時間於教學任務。

在大班講課以小組討論和解答問題補充的過程中，主持講課的教授對推動小組工作的研究生助教，很少甚至毫不注意。教授相信講課之後，已盡了對這門課程的責任。面對教授如此的輕視，這些助教又如何獲得激發

和鼓勵，來認真進行自己的教學責任？

有些大學對指責教學不良，特別是大班講課，常引用教授對學生人數之比很高，作為反駁。這一比數其實並無意義。許多有聲望的教授或者完全不參加教學，或者只有極少鐘點為校園增光。比較有意義的數字還是教授教學時數和學生課程時數之比，即使這一比數也無法顯示教學品質的好壞。

一所很有聲望的大學，曾進行重點調查兩年，想決定大學部學生住所應如何改進，結果發現學生不要更好的食物，或更大的房間，甚至也不要在一棟房子裡住更多的異性。他們真正最需要的是和教授有較多的個人接觸。

或許講課方式的價值，從一個可笑的故事可以得到證明，但切勿忽視其中所指的要點。某一著名大學的一位教授，常被召請到華盛頓，和安排的講課時間不時衝突。他決定將下次講課事前錄音以備在班上播放。有一次，他較預定時間提前返校，行經原定講課教室，聽到錄音帶正在播放。他帶點好奇想看班上如何反應，就走進教室。令他吃驚的是室內沒有一個學生，只是每一個座位上放着錄音機。講課由錄音帶播放，當然不很平常。不過談到效果，和教授親自講課並無不同。大班講課以及用電算機辦理註冊和記錄成績，已使教育失去人和人間的關聯。無怪乎在1960年代後期，強烈抗議期間，柏克萊的學生控訴說：「我是人，我不要受磨折摧殘。」

大學常用的第二種減少用費的不良方法，是將學生按三十人左右編成小組，由一位研究生處理一切有關事項——如講課、批分數、輔導、決定課程內容以及其他事務。這位研究生雖稱為教學助教，但或者可稱為智力洗盤機。這些新手還被用來教未來中小學教師的特定課程。

在一些大學裡，有多達一兩百人的研究生擔任大學部學生的數學教學。在1972年，有二百五十所大學各學系共有十萬九千名教學助教。據估計，在大規模大學裡，大學部一、二年級數學課程有百分之五十，由研究生任助教從事教學。最可笑的是：主張大量利用研究生的，也就是堅持優

良教師一定要是研究人員的大學。

依賴研究生作教師，由於近幾年來發生的情況而更被強調。現在學術界的職位很難找，使修讀博士學位的學生較少，因而研究生人數劇降。研究生作為教學助教人數不敷大學部學生各班級所需。這一事實，並未令研究所煩心。行政主管心中也從未想到請教授來教大學部學生的基本課程，而大學部低年級學生比高年級的更需成熟的教師。大學的系主任對大學部教學反而用可能註冊為研究生的四年級優秀學生，用以湊足人數，以提供足夠數目的教師。

許多大規模大學不僅利用研究生，更有輔助教師——如家庭主婦重任教職，中學教師晚間來教課，由他校的專任教師兼課並支薪。顯然，這些人不能真正潛心於工作。但是，大學部學生的數學課程總數的三分之二都是由研究生和輔助教師任教。

研究生當然關心自己的前程，專心致力於本身的修習，對教學只好偶感歉疚。將未充份準備的課程匆忙講過了事，讓學生在辦公時間找他不到而感覺失望，臨時測驗和大考題目的失當，以及幾乎隨意的批給分數等等。當然，照着課程綱要去教，至於跟不上進度的「較差」學生，讓他們自己去想辦法，終究這些學生不是懶就是笨。造成這種情形的研究生並不覺得有任何失敗，更不會想到還有其他原因，例如一位學生每週工作二十至三十小時以賺學費。如若再准研究生助教選用教科書，由於年輕人未能真正了解教育，甚至數學教育的目的，所選只有引人憎恨。即使教學助教受良心譴責，但只要一想到教授如何應付研究生的教學，自己的良心也就覺得平安了。反之，他們假使真正憑良心教學，勢必永難完成修習的學位——或者，即使完成，也因論文平常，不能在著名學術機構得到職位。

教師必需有智慧，而智慧得自經驗，並非靠書本。這不是批評研究生缺乏智慧，只是指責大學行政主管大規模利用研究生。大多數大學就沒有真正想過先對這些青年男女，教授一些教學的藝術和技巧，如教材表達的方式，試題的編寫，分數的評給，以及學生的輔導等。假如一位研究生自動選修教學法一類課程，一定會失去數學教授對他的重視。確有少數大學

在利用研究生擔任教職之前，先加以教學訓練。要這項努力成功，正像迫使水流向山上去一樣，因為大多數大學並不約聘或保留優良教師的教授，試問有誰來教這些研究生？此外，我們知道，研究生明白他們的將來主要靠獲得博士學位，一定將之列為第一優先，至於教學的成敗多不在意。最後，即使研究生學習了如何教學，也不見得能受到鼓勵，因為給予輔導的那些教授，正好是輕視教學的人。

由研究生教大學部一、二年級學生課程，特別應受譴責。初入大學的學生，正感受到由中學到學院的變動，困難很大，甚至導致精神異狀。許多人不知道如何學習，如何利用圖書館，如何在新環境裡生活，在無父母指引的自由中，有些人會有被遺棄之感，另一些人則無負責感。在第一年裡，學生特別需要幫助和輔導，但就在這一年裡，大學却將他們交在自己還待成長的研究生手中。

讓研究生負課程教學的全責，另一理由是說沒有足夠的合格教授來應付大量學生，這並非事實，教大學部學生課程的優良教師，過去二十或三十年都有充份來源。

從另一立場為利用研究生辯護的理由是：認為研究生可藉賺錢支持自己進修。許多人確需賺錢，但不應以大學部學生為代價。他們需要高水準的教學，並且也付了學費。還有一項理由，是說研究生裡有許多人將來會成為教授，應獲得教學經驗——即所謂邊做邊學。真想問一下，堅持這項主張的行政主管，在生病時，是否會找大學部一年級的醫科學生診治？研究生需要經驗，不過，可以從不必犧牲大學部學生的途徑獲得。研究生可以作為非正式的導師，查看和幫助有困難的學生，或者，有教授在場時試教少數課程，再由教授提供建設性的批評。

還有一種論點，是說用研究生作為教師，比許多教授還更熱心教學。假如他們的熱心超過各項缺點，能做到和教授一樣好，這一論點的正確解釋，只不過指出許多教授根本不成其為教授。

如若他們宣稱的熱心不夠用以支持研究生作教師，但是，他們和大學部學生同是青年人，一定能互通心意。實際上正好相反。由於研究生都很

精通數學，否則不會做研究生進修數學，另一方面，百分之九十五的大學部學生數學都不很好，所以，研究生很可能對自己認為容易的問題，在了解上發生困難的學生，加以藐視。

用研究生作教師過去曾受挑戰，行政主管就將測試結果提出作為辯護。對由研究生施教和由教授以大班講課施教的大學部學生進行測試，結果並無不同。當然，啟發、見識、樂趣或不滿、學生身受不必要的煎熬才得到現有成績，以及學生心理上的提昇或受損，都不是測試所能計量出來。為現在討論的目的，姑且承認測試能計量教學的成效，不過也不能證明行政主管所支持的結論。大班講課和利用研究生同樣是不好的教學方式，所以測試結果只能顯示兩者同樣壞。如若以小班施教則教授講課和研究生施教的學生，分別測試，可望有重大不同結果。事實上，如由勝任的教師小班施教，其測試結果必將顯示何種教學方式優良。不過，測試結果真具意義，參加受測的學生人數要多。即使可能的話，也只有很少幾所大學有成熟的教師足夠教很多小班。如教師不良，就是小班施教也不大可能比研究生教的結果要好。

已經建立地位的教授，獲得教學鐘點很少而薪資很高的利益，也為利用研究生辯護，他們提出的自私論點和行政主管一樣。

美國數學會及美國數學協會，一直遲至1975年，才組設「研究生教學訓練」聯合委員會。不過由於看法有欠成熟，對學科內容和教學法所知不足，加上研究生所受取得博士學位的壓力，因而訓練研究生教學的效果，將和訓練六歲小孩四分鐘跑一哩一樣。

大學對大學部學生公平嗎？私立大學的學費、公立大學的學費以及州和市的撥款比真正用在他們身上的錢多得多。大學喜歡將大學部教學上省下來的錢，用在以高薪吸引高級或有聲望的研究教授。研究也是大學的正當功能，不過不能以應受的公平待遇欺騙大學部學生而推行研究。由不願或不能教學的教授主持大班講課，或利用無經驗、不成熟、心在他處的研究生，都不合倫理，正像搶彼德的錢送給保羅一樣。

大學的這種做法，為何能免於譴責？理由在於：他們利用約聘大名鼎鼎

鼎的人物帶來的聲望，吸引學生。而美國家庭盼望子女畢業於有聲望的大學，將來會得到職業上和社會上的利益。所以總有人繼續送子女到這些大學去。公立大學更有一項好處，學費低廉，雖然這類學校利用研究生的毛病最深，不過比較貧苦的家庭只有送子女到那裡去，別無選擇。

美國的四年制學院和大學對比，在教育方面要好得很多。大體看來，學院中的教學是由成熟而專任的人員主持推動，班級人數也較少。可惜，上面的說法還是有限度的。許多四年制學院成立於一百到一百五十年前，分由和各別教會有密切關係的團體興辦。目的在使父母送子女到學校後，對各別宗教信仰的真理，只有加強信心不會發生懷疑。各宗派設立的學院和宗教上的連繫，現在只有名存實亡，很多甚至已完全終止，所以教會的財務支援也就沒有了。在交通困難的當時，必需建立許多小規模學院使學生易於就近入學。這類學院只能註冊五百至一千名學生。現在就無力爭取好教授，開設各種適切課程，維持必要設備，特別是良好的圖書館。由於難以生存，只有求助於附近大學進行合併。許多這類學院已不存在。

就是較大的四年制學院，日子也不好過。捐款以及州的資助，在二十到五十年前還能夠用，後來就感不足。在謀職不易的時代，四年制學院雖教學負擔較重，還能聘得受過優良訓練的教授。不過，許多約聘而來的人，總將眼睛望着大學裡的位置。在那裡能和同行有激發性的接觸，有更好的圖書設備供用。雖然學院並不要求研究，不過他們仍將大部分時間和精力專注在研究上，希望其論著終能吸引注意，會帶來大學的約聘。高待遇的研究位置，其引誘力幾乎無法抗拒。

此外，接受約聘的合格教師，是以科目為中心。他們的訓練和興趣是自己教學的科目，不斷的尋求同一科目的同行認可。這些大學部學生的教師原來接受的教育主要由對這一科目有興趣的教授傳授，所以也想照樣去做。無論智力多高，大學部的教授一定要知道進入學院學生的高中知識背景，可是却從未做到。事實上，學院的優良教師心目中應當最關切許多事情，他們通常很遲才發覺，有些則永未認識。這是可以想得到，因為他們不僅未曾受過教學法的正式訓練，也極少在系裡同事間認真研究教學問



題和方式。至於行政主管進行推動這類辦法，更屬少見。

四年制學院教育實施不好，通常並非完全應由教授負責。許多行政主管不滿足於教育上所扮演的重大角色即使缺乏聲望，因而想和大學競爭，以要求研究作為約聘及晉升的條件。雖然不免有上述缺點，較好的四年制學院仍然是教學至上僅有的學校。所幸，許多優秀數學家喜愛教學，友好同事間意氣相投，不像大規模大學競爭劇烈，情願捨棄聲望，提供對社會更有效益和令人滿意的貢獻。所以，樂於接受四年制學院的約聘，專心致力於教學。幸賴他們，四年制學院才成為大學部學生教育的主要依靠。不幸，大學所訓練的學士候選人却兩倍於這類學院。

至於兩年制學院和社區學院則較四年制學院稍差。現在這類學院利用教職機會難求而從有聲望的學校找來博士。事實上，有些學院堅持新聘教授必需有博士學位。不過，由於所有高中畢業生都能自動升入初級學院，因而其教學問題，甚至比四年制學院更嚴重，而博士主要為研究而訓練，不宜在兩年制學院任教。

大多數學校的不良教學，多方面造成大害。對大多數教授的研究著述，前面曾經談過，評價過高。另一方面，教師在一生教學中影響以千計的青年人，其中不少人將成為國民生活各領域裡的領導人物。他們對教育的態度，決定將要從事的終生事業，以及建立自己的信心，可以說大部分由他們的教師決定，至少受到強而力的影響。許多青年人放棄從事科學事業，只因數學成為一項障礙。大多數這類情事，可以確定教學是苦惱的真正根源。讓我們再重提一下，大學也訓練中小學教師，因而確能影響各級教學（參閱第八、九兩章）。

雖然數學教育不良的主要受害人是學生，但也危及數學本身的命運。在任何國家或文明裡，數學顯現的力量不僅靠天才產生有價值的全新成果。如若這些天才的成就，孤寂無聞乏人領會，也不過是荒野中呼喚。數學知識應保持生動活力傳遞給年輕一代。即使是科學的突破，如不能被了解吸收，對社會的價值亦屬疑問。只為了發覺和培植未來的數學家，也應要求教育實施範圍寬廣，優良教師衆多，天才出現常在最難預料的地方，除非

每位教師都優良且警覺性高，天才常會一再被看走眼。世界上最偉大的數學家之一高斯的才智能力，在青年時爲一位無名教師發覺，經推介於彭斯威克公爵（ Duke of Burnswick ）並請求資助。高斯之父爲一砌磚匠自無能力送其子入大學。不問優良教師本人對研究有無貢獻，他們是播種的人，讓種子在青年心中生根。其中有些人將成爲高斯，另一些人會使高斯的成就對社會有益。

儘管教學極爲重要，遠超過大部份研究的重要，但是優良教師在現時大學世界裡沒有地位，甚至在那些堅持研究爲教授條件的四年制學院裡，也沒有地位。在高等教育裡，教師不問如何優良，如若拒絕向鍍金的出版偶像膜拜，他的才能的出路就越來越少。在只認可研究的價值環境裡，使得教師自覺失敗，不能真被平等看待，必須忍受二等公民的待遇，由於某方面的失察才能獲得永久教職。教師晉升很慢，薪水雖無法律規定，總比研究人員低得多。在系裡，將教師看成拖累，既然聘進來又拋脫不掉。當前情況，有一位作家曾說，現在學院教授分爲兩類，企業類教授和教學類教授——或者，優勝者和失敗者。

在大多數有聲望的大學，以及許多會變成爲有聲望的大學裡，沒有一位數學家主要由於任教師而獲得永久教職。行政主管有時承認有這種情形，但又申明他們提供求知的環境和機會，讓大學部學生和有挑戰性智力的同學，得以交往。不過，這是難以消化的最粗劣代替的食品，大學生應由優良教師處取得好食物。此外，如若教學真不重要，爲什麼教授的薪水從學費裡支付？最可笑的，這些行政主管自己都希望子女能得到優良教師，如未成功，就會毫不遲疑的大聲說出來。

和教學對比，研究簡直神聖不容侵犯，研究教授顯示偽裝虔信者的神態。即使他們的論著大都缺乏價值，但經由術語和符號的掩飾，不易明白認清。研究竟成爲比教學更高貴更高級的使命。每年傳播知識給一百名或一百五十名學生不足重視，而專門期刊上一篇可能沒有一個人會看的論文，反而十分寶貴。意義重大的知識傳播和無關重要的塗鴉亂寫自不能並列。

已獲永久教職，薪水很高的教授有某些程度的自由。不需每年出版很多頁數的著述，如將一部份時間專心致力於教學也不會冒很大風險。不過，教授是全體人類的一個橫切面，如若更多的研究可以加薪一千元，的確很有引誘力。同行和專門組織的讚譽自比學生的讚譽更為悅耳。研究的聲望遠勝傑出教學的聲望。

學士學位的規定課程和要求條件，在許多大學和學院裡已在進行檢討。由於1960年代抗議時期，院長和教授為了安撫學生，幾乎取消學位要求的一切特定課程，現在承認寬大得太過火。規定課程表和學位要求條件當然重要，不過並非必需改革事項中最重要。規定的必修或選修課程就是再好，在現時教學實況下，還是會不按規矩去做。研究教授仍然不理課程內容說明，只講自己喜歡的，而研究生由於教學條件不夠也會搞壞了審慎計劃的科目。

至於不斷研討大學和學院組織中的督導系統、責任區分、考核程序以及其他問題，情形也和上述一樣。汽車製造公司為理想汽車準備好有效的組織和藍圖，可是，如果用的是劣質汽油，一切組織和藍圖都沒有用。

## 第六章 偏狹的數學家

實際上，教育並不像某些人公開讚揚的那樣。

柏拉圖 *Plato*

今天的文理學院（大學整體的一部份，或獨立），都需要能滿足多種學生的興趣。達成文理學科教育的價值及目標，適切的課程才能顧及各方面的興趣。精通必需的教材配合恰當的教學方式，成為教育家的主要任務。教授深受研究的壓力，研究生又忙於取得博士學位，雖然兩者關心的目標及原因各不相同，但均學養偏狹。這兩類教師不問是從事研究或接受研究訓練，即使知道一些數學，但却完全不了解科學和教學法，他們所關切的，幾乎完全是只有數學家才珍視的內容和價值。可是，他們又不得不應付為滿足學生不同興趣而開設的一些課程。教授和受到教授暗示的研究生，究竟如何去教一些最基本的課程？

學院和大學文理學科的學生，是修讀數學最大的一群人。他們選習數學課程只為符合學位要求條件。一般選修的學生對數學多不感興趣，甚或很不喜歡。對這些非專業數學學生的教學，或許是專業數學家最重要的任務。從廣大社會學觀點，甚至從數學觀點來看，都很重要。因為這些學生中有很多人將來會成為社會領導人物，以及決定支持這一學科達到何種程度。此外，將學生區分為將來會用到和不會用到數學兩類，是依據興趣而

非能力來區分的，在不會用到數學的一群中，可能包含某些最有價值的學生。

為配合不會用到數學的一群人，大多數學院（獨立或隸屬大學的），都開設稱為文理學科的數學課程。不管這類課程如何重要，大多數數學家輕視這種教學工作。認為教非專習數學的人是自找麻煩，浪費時間和知識在數學上「無用之人」身上，有傷他們的尊嚴。不過，許多教授必需教一些這類課程，以達到規定的教學時數。他們教的是什麼呢？由於大多數數學家常有自憐自愛傾向，提供的也是自身映影，他們偏愛純粹數學，甚至只有某些課目能引發他們自己的愛好的領域。讓我們看一下這類課目。

顯然，他們最喜歡的是集合論。集合不過是事物的積聚，但是學生要學習集合的運算，如聯集、交集和餘集，以及這些運算的性質。集合論又包含無限集合，例如，所有偶數的集合。一切這類教材對基本數學和實在界現象而言，毫無意義，即使有意義也不過微不足道。而且無限集合的概念，在1870年代以前，曾為最優秀的數學家所不能理解而遭拒絕。就在今天，仍有許多數學家不能接受。學習集合，尤其是無限集合，甚至連「無窮小」的財富也不能回報學生。學生也無法了解為什麼要去捕捉力所不及的東西。

數學家另一項偏愛的課目是數論，研習整數的不尋常性質。一些數，像6，是「完美」的，因為這個數是其因數（除這個數本身以外）的和，例如6是1、2及3之和。「不幸」已知的完美數很少，因而立即進而研究質數。質數是只能為這個數本身和1所整除，像7就是質數，而6則否。許多定理討論質數和非質數（合成數）的性質，有一些數學家認為數系裡的質數最有趣和引人，而學生却視之為有敵意的陌生人，他們學習到有無窮的質數，就認為這個世界真是充滿敵人。

數論也包含稱為同餘論那一部份。這一課目似乎是文理學科必不可少的課程。同餘論關聯到的是就如同時鐘如何記錄時間的一種算術。九點鐘後六小時，時鐘指示三點鐘，即 $9 + 6 = 3$ 。換一種說法，即將十二或十二的任何倍數捨棄或作為零。當然，這是一種特別的算術。同餘論專門研

究許多有關這類的花樣。就是普通算術，不論多麼有用的知識，學生已經很覺無味，時鐘算術又有什麼特色能引發學生的興趣？此外，許多人對普通算術運算還沒有多大把握，新的算術又將他們稍有一點自信，也剝奪無餘。

在文理學科數學課程裡，一項常有的課目是公理論（見第三章）。由於公理論方式現在常用在許多課程的教學方面，這一課目值得在此處特加注意。每一門數學都建立在公理上，歐氏幾何就是一個典型，研究任何一門數學的公理基礎都會有很多收穫。當然，十九世紀最重大的發展，非歐幾何，就是改變公理的結果。在文理學科課程中，教的是公理論中的那些特點？有些教授介紹一項公理系統，然後僅討論這一系統應有什麼性質。例如，獨立性就是其中性質之一，即任何一項公理不可能依據另一項公理加以證明，否則被證明的公理即應稱為定理。研究公理系統的性質，數學基礎論專家最有興趣，但對新手而言，公理是任何數學發展中意義最少的部份。公理只是種子，最後可能結出果實，但專門討論公理本身的性質，並無重大價值。

「搞」公理的另一種方式，是告訴學生發展一門數學所需的一套公理，並非獨特的和唯一的。可以改變公理仍然推衍出原先公理的重要部份。或者，可以在某一門數學裡減少一些公理，不過，可能的定理證明更為複雜。後面這種做法，較為愚笨且往往沒有意義。所以難怪告訴學生說可以用九個或九個半公理代替十個公理時，他們並不覺得高興。

從學習公理論，文理學科學生得到的一項真正價值，是幫助大家在任一領域裡必須作一決定，或堅信一種信仰時，應當先考察其中實際所包含的假設。可是，數學這種教育對文化其他領域的利益，却從未見提及。公理論教學這件事本身，就加強了數學不教批判思考的爭論。如若不然，教授應當自問為什麼在文理學科課程裡，要教公理論。

某些文理學科課程，當然還有更多高級課程中，確實是從公理蘊涵中推衍出定理，正如中學課程裡的歐氏幾何一樣。這種演繹方式在一門數學裡，無疑是優美的。可惜，這種方式常對想出定理和證明更真實的思考過

程，發生歪曲。建立一項定理必需以公理和已知定理為依據，強使數學家修正其原創論點，將定理納入邏輯順序認為最適當的位置。修正的證明可能遠非定理創造者相信其為正確原創的想法。此外，在得到至少一項成功的證明後，看出主要困難如何已被克服，創造者或後繼者常會再想出一項更聰明或更直接的證明。大多數定理常被重複證明多次，每一後續的證明，都將前此證明修改，並常連帶使之一般化，或有更具力量的結果。所以，定理和證明最後和原創者的想法遠不一樣，常將由直覺領悟的方式完全改變。一些用來修改原先直覺的邏輯，全是存心造作而不自然，以致妨礙了解。一百年前，摩根（Augustus De Morgan），近世邏輯創設者之一，告誡我們說：「學生切勿相信：事後用以推衍出定理最方便順利的方法，就是發明和完成定理的方法。發現者的進展通常並非像事後為了方便而採取的抄捷徑方式，只是順著一條路走。」

因為演繹方式不易於理解，更由於歪曲自然的直覺方式，所以，對學生的價值和其優美程度恰成反比。從學生方面來看，公理由於權威而承傳下來，再由邏輯奇人窮盡心思搞出一個接一個的定理。學生無法知道公理從什麼地方來，也不知道為什麼特別選出那一些公理，似乎永無止境的定理究竟會通往何處。即使學生能把握證明中的每一步驟及所證各點，通常也不能了解證明後面的基本道理，以及所依據的思想和方法。為什麼特別用這一連串步驟而不採取或許更易了解的另一類順序？學生當然有理由，因為面對這種經過改造、更令人迷惑，也更複雜的結果，根本無法領會。十九世紀後期和二十世紀初期，著名數學家潘加瑞指出這點：「如若一項理論，是由嚴格邏輯規定的固定方式開始而建立起來，而沒有說明引向這項理論的一些嘗試經過，會有人了解這一理論嗎？不會的。不會真了解，甚至不會記得。如果想牢記不忘，只有用心死背。」

一步接一步的證明，好比新手看兩位國手下棋。新手看得出國手的每一步棋都合於規則，但不了解為何要下特別的這一着，而不在可能的另外十幾種下法中選用另一着，更不能將整個局勢瞭然於胸而看出一連串的步驟。同樣的，看一步一步的數學證明，其中每一步都合於某一公理或某一

已知的定理，但這事本身並未表達整個證明過程如何計劃，也沒有教導他們比較這一證明方法和某些其他證明方法的優劣同異。由於學生要複演證明，他們只有死背硬記原定的一連串步驟。

許多教授在講過一組定理和演繹證明之後，走出教室，自覺很滿意，不過學生的感覺並不如此。在不能了解的演示過程中，學生不會涉及真正的思考，也沒有受到啟發。學習這種證明要花大力氣，但缺乏思考和興致。數學演示的邏輯順序，對學生的幫助，好比文學著作中所用詞字的字母順序一樣不太有用。大學和學院的「概況」裡，總說以鼓勵學生自己思考為第一目標，可是教授的演示並非增進心智的開放反而是心智的約束。

數學家對教學法有一種天真的觀念：如果將一套概念、定理和證明正確而明白的陳述出來，再用上很多符號，就一定會被了解。這好像美國人對不懂英文的俄國人大聲講說英文，相信增加音量保證會被了解一樣。

數學用演繹方式表達，在心理上也有壞處。將使學生相信數學是由天才創造的，從公理開始，經由完美無瑕的直接推理而得到定理。有了這種數學要靠天才高度廣博心智的印象，學生往往感到自己能力低微，甚或覺得沮喪，尤其當熱心的教授在陳述教材時，好像自己也就是活生生的天才。

邏輯或演繹方式不能帶來了解，正如伽里略曾說：「我認為邏輯可以用來試驗已經發現或完成的一項理論的確定性。不過，我不相信邏輯會教人發現正確論據及證明。」列成順序的邏輯說明，只是將直覺了解穿上盛裝，不過將血肉之軀掩蓋起來而已。正像裝飾女人的衣飾，或男人用來扮演成女人的服裝，這都不是真正的女人。邏輯可以作為數學的一項標準或一項約束，但不是數學的本質。雖然如此，教授教數學仍然普遍採用邏輯方式。

廣被採用的理由是因為教起來容易。整個教材已安排成完整現成的順序，教師要做的只是複述一遍。反之，就必需知道一項概念或證明的直覺意義，深明一項證明的基本概念，並透徹了解一項證明何以比另外一種可取。即使教授對上述各項充分了解，要將之傳授給學生也十分困難。許多



教師抱怨學生，特別是工科學生，只想知道他們學習的各種方法如何實行的程序，以後能夠照着方法去做就好。但若教授逃避真正的教學技術，無法引導學生參與構想的過程，解說所以這樣做不那樣做的理由，以及提供可信服的見解，只提出邏輯演示，那麼，更應該受到責難。

由於以邏輯方式教數學無法帶來理解，甚至會曲解原先的思想，可否根本不用這種方式？答案當然不是。至少我們在前面已經提示了理由，即證明是對直覺的檢核，同時也將直覺加以精純化和強化。正像和對手爭辯一項政治問題，在論辯中會發覺原來想法中的缺點一樣。

不論文理學科的某些課程是否確和公理論本身有關，但實數系的邏輯發展總是被提出供作數學「壯麗」的主要例證。實數包含正、負整數，分數，以及像 $\sqrt{2}$ ， $\sqrt{3}$ ， $\pi$ 等等的無理數。現在要談到一點歷史，這些數靠着直覺和實用才引進數學。比方說，數學家所以學習到 $\frac{1}{2}$ 加 $\frac{1}{4}$ 是 $\frac{3}{4}$ ，是從半個餅和一個餅分成四塊的一塊合起來，就是一個餅分成四塊的三塊那樣學來的。數學家運用各種數在五千年以上，都很成功，絕少關心這些數的性質和精確定義以及邏輯發展。爲了純粹專業的理由，數學家在十九世紀後期才決定以明確的公理爲基礎，建立邏輯結構。當然，邏輯結構一定要承認原已從經驗基礎所建立的各項事實。這使得它變成高級人工化，精心設計而頗爲複雜的。從邏輯立場來看，無理數特別是心智上的怪物，多數人對於這一顯然越軌的數，其數學名稱採用有譏諷性的「無理」字樣，頗爲欣賞。巴斯卡的名言：「不相信真理的人，會從過程遲緩曲折的理性獲得真理。」這段話用在實數系的邏輯發展上最確當不過。

許多教師可能反駁說，學院學生已經學過數系的直覺事實，可以準備欣賞作爲數學例證的演繹方式。如若學生真已從直覺了解數系，則邏輯發展不僅不能增進了解，反而會有破壞作用。如當它是數學結構的實例，由於其構想完全是有意設計的，將是最壞的選擇。這項發展不僅使得心智愚笨，更使正確觀念爲之混淆。可是，這一課目已成爲學院裡一項主要課程。假如猜得不錯，有些教師喜歡將數系直覺熟知的事實，用令人難懂的公

理方式來陳述，因為他們了解了這種單純基本的數學，而看起來却是可教出深奧的東西。

許多教授為教實數系的邏輯發展辯護，藉口稱道這正是數學建立模式以解決實際問題的好例證。現在且不討論應用數學（參閱下一章），但可明白看出，說這種話的教授對數學如何應用，一點觀念都沒有。這一例證有很多謬誤，現在指出其中兩點。實數系約在公元前3000年就已用到，大概在建構其邏輯「模型」前五千年。幸好並沒有人因等待這項模式的出現，而不用實數。此外，就在今天也沒有人應用這項模型，由於太過造作，邏輯上又複雜的結構和實在界相離太遠，幾乎有天地之別。甚至沒有人會想到用以預測有關實數的任何事實，更談不到在物理上應用。建構實數系邏輯基礎的理由，和實質問題一無關聯。少數教授可能覺察到這些事實，或許為了引起較令人喜愛的聯想，才採用「模型」之稱。不過，問題中的邏輯結構完全沒有血肉之軀的真實感。

如若不提符號邏輯，總覺得文理學科課程不算完全。這項課目是將通常推理原則用符號方式來表達，認為這就傳授了推理方法。就這一目的而言，實在好笑。要知道使用什麼符號以及如何運用，一定要先懂得「與」、「或」、「非」和「蘊涵」的普通意義。不過學生心裡並不清楚，所以符號邏輯只是用無意義符號來加以掩飾。對尚未能分辨「所有A是B」和「所有B是A」的學生，教以符號邏輯是何等可笑的事！這一課目只有數學基礎論的專門人士才覺得有意義。和符號邏輯有密切關聯的布氏代數，因為應用於「調換電路」設計方面，也常包含在文理學科課程裡，似乎文理學科的學生有一天全都會成為電子工程師。對學生提到上述應用，可能暗示學生最好「調換」課程。

文理學科課程聲稱要傳授數學的能力，但却以為教授如群、環、體等抽象結構可達目的地。例如，群是事物——像正、負整數——的任何集合和一項運算，以之用於任何兩元素可以產生集合裡的一元素。這項運算，像用於正負整數的加法，一定具有一些附加性質。這些附加性質可從熟知的加法性質抽象類比而得。這熟知的性質為： $3 + (4 + 5) = (3 + 4) + 5$

；有一個零；一個整數，像 2，與另一個，-2，兩者之和為零（參閱第三章）。

抽象的確是數學有價值的特點，顯示許多具體結構共有的性質，正像對哺乳動物結構的知識，能教我們知道千百種哺乳動物很多有關事項。此外，對抽象的了解，常能立即看出它能應用於全新現象。抽象確能揭露幾種相似具體系統的邏輯結構，不過也使具體系統顯得無力，正像人體骨骼結構不能顯示整個的人。可是，有些數學家會回答說，在演示抽象結構後，再舉出具體例證。無論為何，必先徹底了解具體例證，然後才可以介引統合的抽象概念；引用學生尚未熟悉的具體資料作為例證，並不能使抽象概念更清楚。無論如何，學習過程是從具體到抽象，不能反過來。就教學法而言，唯一可靠方式是從眾多的樹看出森林。

許多教師偏愛抽象課目，如群論之類，由於他們相信這是有效方式，一下子就傳授了很多知識。以為教了群論，學生自動就學會有理數、實數、和複數的性質，矩陣、同餘、變換以及其他課目的性質。可是，學生只學習抽象群論，並不能據此做分數的加法。

抽象確能將許多似乎無關係的發展，發生關聯並統合起來。不過，青年人的背景知識很少，無從由抽象得到啟發和統合。所討論的抽象結構和學生的數學經驗相隔過遠，所以這類結構對數學的價值，不會比哲學的力量對駕駛太空船的價值更明顯。學生看抽象只當作模糊的暗影，引起一種神秘，甚至憂懼的感覺。正像在稀薄空氣中，人為呼吸而掙扎，心智為把握抽象也極為緊張。抽象或許籠罩整個教學，但是却漏掉了學生。

什麼是美國今天面對的重大問題？通貨膨脹？失業？融和少數民族？保持仍受他國敬重？女權主義？假如從文理學科的課程內容來評判，那就是孔尼斯堡七橋問題。前面曾經提過（第一章），約在兩百年前，東普魯士的孔尼斯堡村民為了好玩，想連續走過附近七座橋，但任何一橋不能再走一次。這項問題引起十八世紀偉大數學家尤拉的注意，隨即說明沒有辦法。可是，數學家不肯讓逝者平靜安息，又使這一問題復活，就像這是美國文明面對的最重大問題。

文理學科課程裡，選進了一堆單調無味、遠離實際、沒有效益，或矯揉造作的課目，實在壞到極點。許多課目引自專為專業需要創立的數學基礎論。除少數例外，大都是十九世紀後期及二十世紀的產物，遠在數學有極多最偉大創造之後。已往最佳數學家——亞基米德、笛卡爾、牛頓、萊布尼茲、尤拉、高斯，從沒有用到這些課目，理由很簡單，當時還沒有。即使現在，大多數偉大數學家只在特定基礎研究上才用到這些課目。文理學科課程列入這些課目，一定要耗費很多時間先說服學生，去學習幾千年來整個數學世界所未有，又為今天數學家極少用到的課目。其價值正像教居住沙漠裡的人學習挖掘蚌蛤（參閱第十章）。

通常用來代替上述混雜課目，像集合論、公理論、符號邏輯、數系的嚴密化有另一種方式，即專教技巧性數學（technical mathematics），接着高中課程講授包含更多高級技巧，是舊有傳統的延續。採用這種方式的學院通常要求所有學生多學些代數和三角。這項要求令人回想到中世紀醫生治療一切疾病的方式，即「醫治」任何病症都教病人放血。正像這種治療法，讓病人放血而死，也算解除了痛苦。現在的技巧性課程，使學生對數學僅有的一點尊重，也化為烏有。

另外還有一種方式，今天很流行，即所謂「有限數學」（finite mathematics），或許除了學生的有限注意力外，究竟什麼是有限的，並不清礎。這種課程不教任何微積分，但却用到實數、複數以及代數方法和定理，多方面涉及到無限。其內容和典型的文理學科課程一樣，由許多課目混雜湊成，相互間又沒有關聯，對學生也沒有多少意義。由集合論、符號邏輯、概率論、矩陣、線性規劃、賽局論等等課目形成的大雜燴（我們也不必在此處細說各課目的性質），正是不斷侵襲數學教育的時尚之一。

這種課程如果適當選擇其中的課目，對社會科學的學生可能有益。或許它會包括對某些社會科學的應用。例如，經過探察，發覺一項數學系統可用以描述原始波尼西亞社會的婚姻規則。為選擇適當課目，安排課程人員要用很多時間尋找對社會科學家真正有益的教材，不過數學教授不會做這類事情。有限數學不只是時尚，還是騙局，無論如何不合於作文理學科課程。

上述文理學科課程，對學生投入的辛勞，回報太少。說是要學生學習建築，但只教會砌磚，說是要學生學習繪畫，却只教會混和顏料。如若這些課程表現的是數學對文理學科價值，學生當然就有理由忽視或輕視數學。

由於所有教材和宣稱的價值，不能使學生信服，有些教授就專心注意肯接受和研習教材的學生，不問基於何種原因，而且往往不自覺的過份誇獎這些學生的聰明智慧。至於「智力較差」的學生，為數達全體的百分之九十八，他們確想知道為何要學看來無益的教材。這些教授沒有注意自己的責任是教所有的學生。

不問選用什麼課目，反對文理學科數學課程的根本理由，在於所有課目只着重數學本身，而數學本身是遠離實在、無關世俗，甚至屬於另一世界。這一想法，近世最偉大數學家之一——威耳就曾表明：

數學談及的事物，可以說，完全和人沒有關聯。數學不關涉人的性質，好像星光，燦明銳利而冷漠。說來出人意料之外，人的心智創造對越遠離人存在中心的事物，越知道如何安排得更好。所以，對最不重要的知識，我們最聰明：諸如數學，特別是數論。

十九世紀後期名數學家巴思齊（Moritz Pasch）甚至喜歡另一種想法，即數學思想和人性相反。

數學不自然的性質，可以用歷史說明。曾經存在的幾十種文明，其中有因文學、宗教、藝術、音樂而為世人所讚頌，但也創造實用的算術規則以及一般形狀的面積和體積計算方法，不過有對有錯。但只有一種文明——希臘文明——從想像創造數學，由演繹推理建立結論成為科學。即使希臘也認為數學只是達到目的的一種工具，目的是了解物理世界。只有另一文明，近代歐洲文明，在新成果的深度和數量上超過希臘。西歐研習數學正效法希臘。

數學本身的內容，對大多數人沒有吸引力，討論抽象是其最嚴重的限制之一。只討論人性，雖能從研討中學習到很多關於人的事情，但很難與人實際相處得到的同樣豐富、滿意和充實。此外，由於內容抽象，因而

內容本身和生活難有關聯。一切數學集中於數、幾何形狀和一般化。不過，就真實事物性質而言，數和幾何描述並不重要。一塊土地或一個畫框的形狀可能真是矩形，可是，誰會爲了土地或圖畫而接受矩形？

前面曾經說過，特別由於以前所受的教育，學生極少可能對這類教材發生興趣。學生在開始接受學院的數學課程時，已經在以前的教育過程中學習過這一學科某些領域。可惜，一般學生在早期經驗裡，對數學是什麼以及在文明中數學有什麼成就，這方面觀念所知非常有限。僅曉得這一學科的內容是一連串解題技巧，而這類技巧一定孤立於任何顯明可見的用處之外。未能明瞭數學的價值，常使學生學不好，更因其無益而加以輕視，害怕更進一步深入涉及這一學科。

許多教授宣稱，文理學科課程內容幾乎無所謂的，這項課程是教學生正確的推理，即通常所謂演繹推理。有關數學本身的課程能教人推理更爲明確。不過，學生在高中時已經學習數學三年或更久，如若數學提供心智的訓練，應已能滿足所需。

事實上，炫耀演繹推理的價值，實在太過誇張。在日常生活、各種事業、以及大多數專業方面，演繹推理全屬無用。沒有堅實可靠能夠作爲依據的公理，可以教人如何先擇終身事業，去和何人結婚，甚至去不去看電影。而進行研判，必定要分析品格、個性、價值以及行爲良否，才是明智之舉。這要有高度認知和批判的才能，不是數學所能提供。演繹推理不是理性生活的典則。實際上，對人生問題能有明智的了解和判斷，所需的才能，數學家並不比他人更多，研究數學對獲得這類才能也無貢獻。牛頓在研究先知但以理的預言時，決非是一個批判性的思想家。在數學訓練心智的爭論中，即使學生也嗅到職業騙徒的味道。

此外，演繹推理從許多其他關係中，反而更容易學會。我們常教學生知道，等腰三角形的底角相等，但不能因而就說底角相等的三角形就是等腰，必需首先弄清有關名詞的意義。可是，從下述例子，也能學到這一點，如說好汽車都很貴，但並不意謂所有很貴的汽車都是好車。

大多數數學課程實在並未教人任何一種推理。學生就常爲必需死記教

材才能通過考試而困惑。對這點最好的證據，還是讓教授本人提供，如向教授請教為什麼不准在考試時讓學生查閱書籍，他們的答覆常是：「那麼，我還能考什麼？」

在以訓練推理為數學辯護的理由消失以後，許多教授就說數學能提供美感的滿足。雖然，有部份數學確能表現美感，可以在文理學科課程裡加以表達，不過受到兩項限制，第一點，數學缺乏圖畫、雕刻、音樂的感性吸引力；第二點，學生因為在中小學被迫學習數學而引起的憎惡，不會受感動想去學這一學科裡少數有美感的題目。想對文理學科學生推銷數學的美感，註定失敗。

許多教授宣稱文理學科課程的目的，是教數學是什麼以及數學家做些什麼。沒有任何曾經想出來的說法，比這一說法更有效的迫使學生遠離數學。數學是什麼？是遠離人生的抽象所組成的集合。數學家做些什麼？他們力求個人的成功，為達目的甚至不惜多方欺騙，說要吸引學生，但却對學生利益完全忽視。當然，數學家能創造，可是，這些課程確能傳授諸如探尋摸索、臆測猜度、盲動失誤、內心掙扎、假設試探、挫折沮喪，證明錯失、深入洞察，以及其他創造過程中的行為嗎？不能！所教的只是正確的定義、定理、和證明，好像上帝的選民經由聖靈啟發，一開始就能直接得到最後的結果。

智力的挑戰和成功的激動常被當作數學的另外一些價值。數學家對智力挑戰的回應，正像商人對賺錢的刺激一樣，享受到探求的魔力、冒險的感受、發現的激動，克服困難的滿足、成就的自豪等等。如果願意採用另一種說法，也就是自我的提昇和成功的陶醉。由於數學提供的問題明確清晰，所以在數學方面，這些價值顯示得比任何其他學科更多。不過要得到這些價值，對這一學科必先發生興趣，並已具有一些才能。學生或有難得的例外，由於個人恒心堅定或運氣夠好遇到一兩位優良教師，可能進一步享受到數學的這些價值。但是，這樣的學生只是例外，在選讀文理學科的學生中，幾乎可以肯定的說，難以找到。而且，人的智力各有自己想要挑戰的對象，許多人認為法學和經濟學的挑戰性更有意義。

在學院裡，文理學科學生的課程，究應提供些什麼？答案正好包含在所提的問題裡。數學對文理學科的價值，也正和數學對文化裡其他領域的價值一樣。數學是我們了解自然界的鑰匙，對人不斷探尋自然秘密給以信心，又使人有能力克服自然。例如，我們現在知道行星和電子在原子裡的運動，物質的構造，光、電、電波和聲音的行爲，就能運用這些知識。這類知識的運用，有些已爲我們熟知，如電話、唱機、收音機、電視機，這都包含有數學的成就。數學，特別是統計學和機率論，對社會科學和生物及醫學研究，其價值日見增加。探尋哲學或社會科學的真理，如果不涉及數學在這類研究中所扮演的角色，也無從討論。圖畫和音樂久已受到數學的影響。以數學成就對科技的意義作爲主題，已多方面滲透進文學。如果不明白此類作家和詩人對數學影響表現的反應，就不能了解他們的作品。宗教的教義和信仰，已因數學所顯示的宇宙，而發生重大改變。事實上，整個心智境界，亦即時代精神，決定於數學成就。這些均屬數學的文理學科價值，應爲文理學科課程的本體。

這樣課程的內容，即使簡略說明，此地也難以容納，現準備少數適當例證，或能有助於明白其貢獻。一般人認爲解釋自然現象是科學而非數學，但應知科學所不可或缺的是數學，下述即其一例。

一切運動現象均涉及重力。重力作用可以用來解說爲什麼行星及其衛星保持其週期性路徑，以及爲什麼太空船可以送達月球。地球上所有的運動（如在平路上行走、上山或下山、乘汽車或坐飛機、從座位站起或坐下、機器急速轉動、甚至我們身體裡血液的流動）都涉及重力作用。或許了解重力將澄清一切這些運動。有人認爲數學定律說明重力作用的數量問題，雖屬有用，可是重力是物理現象。如若只知強調物理上的重力，將數學定律作爲分析及預測物理作用的助力，那就沒有把握重點。

太陽的重力吸引，如何保持行星按照既定軌道？有一條鋼纜從太陽拉到地球，使地球不會飛離到太空，只限制在橢圓路徑上嗎？物理範圍中我們不知道重力如何作用。事實上，並無重力，正如貝克（Russell Bake）說過：「你不能在任何地方買到並儲存起來，以使用於沒有重力的日子



」。那只是想像的虛構，用來對我們所見所為的各種運動，提供直覺的瞭解。科學如何能用重力，如此精確的預測日月蝕，甚至送人到月球？答案是：重力的數學定律是我們對重力所知的一切。從這項數學定律及其演繹所得，我們能描述及預測數以千計的物體動態。牛頓實際偉大的成就之一，是表明這項定律對地球上和天體間運動都能應用。

數學這就不僅是我們了解運動的鑰匙，而且是我們所知僅有的知識。同樣道理，也用在說明光、無線電波、電視波、X光、以及稱為電磁光譜一切的波。學生享受由無線電收聽的音樂，從貝多芬到披頭，應當感謝數學。物理科學現時情況有點古怪，各項最有用理論可靠的本質完全是數學的，而其物理內容反而有欠明確、不完全，還有些自相矛盾。這門科學成為數學理論的滙集，只有少數可觀察的物理現象混在其中作為點綴。照波普（Alexander Pope）的說法：這巨大的迷宮並非沒有計劃，其計劃正是數學的。

事實上，如若主張整個物理世界的知識可以約化為數學，並不困難。正像季英斯爵士（Sir James Jeans）所說，「科學描繪大自然所有的圖像，都是數學圖像，而且單獨看來又能符合觀察到的事實」。不僅如此，這些圖像都是人為的，沒有已知的物理客觀宇宙。宇宙的立法者是我們，並不是上帝。

上述數學的文理學科價值，所引例證顯然取自物理科學，而非社會科學。數學對前者領域提供的理論和預測，確能描述所發生的事件。但在後者領域，提供可能發生事件的模式，有些並未實現。不過，社會科學尚在初期階段。

文理學科的價值太多又太重大，現只能再談一，二例證。在十六及十七世紀，主要由於哥白尼（Copernicus）和開普勒（Kepler）的成就，天文學理論從地球中心轉變為太陽中心論。根本上，是因為後一理論的數學比較單純。原有以地球為宇宙中心的看法，顯然人是地球上最重要的生物，所以人的生命、目的和活動，最受重視關懷。如若有一位上帝——這在十七世紀之前，無人懷疑——所關切的一定只是人，所設計的世界顯然

爲照顧和增進人的利益。但是太陽中心論粉碎了所有這類信仰。地球只不過是許多行星之一，全都繞着太陽運轉，人只是地球上無足輕重的生物之一。至少依照天文學理論，人如何能相信一位上帝會關切浩大宇宙裡一隻小蟲，一粒灰塵？正如阿諾德（Matthew Arnold）所說：

信仰之海 昔時所現 浪高波湧 環繞大地 閃耀重疊  
 展如匹緞 此一世界 有如夢境 悲愴如咽 眼前唯見  
 如此新奇 究其實在 無歡無愛 更無光明 堅信既失  
 怡靜復缺 解苦何從

還有更重大的另一目的，無疑的，屬於文理學科課程，即追求真理。自史前時期以來，人經由宗教、哲學、科學和數學尋求真理。由希臘時期開始，數學被普遍接受作爲真理的主要部份。這一事實的意義擴展開來，遠超過數學本身以外。獲得某些真理就給人以證明，人確能獲得真理，從而予人以勇氣和自信向政治科學、經濟學、倫理學和藝文方面，尋求真理。不過，非歐氏幾何的創造，粉碎了多少世紀以來人對自己智力潛能的信心。這顯示數學並非真理的主要部份，只是自然現象人爲的近似說明，會遭受改變，不過有實用效力。

雖然數學是文化的產物，但轉而影響和配合文化，西方文化就是顯明例證。正像美好文學的意義超越紙上彙集的文字，所以數學的真正意義就在於其對社會、文明和文化所完成的使命。尤其數學是人本身和外在世界之間最堅固的橋樑。數學是「未知」的外衣，使我們能認識「未知」的一些外貌。照笛卡爾的說法，數學是手段，人用以擁有自然和把握自然。數學本身可能是人的發明力和創造力的紀念碑，其本身並不能洞察實在界，但能有助於了解實在界，所以顯得重要。這一點一定要教給學生。

因此，真正文理學科課程的首要目的，不是精通純數學的概念和技巧，而是能夠欣賞數學的角色如何影響、甚至決定西方文化。欣賞和技巧久已認爲是文學、藝術和音樂的目標，同樣的理由，也應是數學的目標。數學的文化觀點，而非專家的偏狹看法，應在文理學科課程裡多加強調，使之能和其他領域的主要思想潮流發生密切結合。

數學和文化的其他主要部份相互間之有難以分離的關聯，這種觀點是否有點令人驚奇？知識是一個整體，數學為整體的一部份，但整體並非各部份之和。文理學科課程現用方式，是將數學作為一門限於本身的學科，而又盼望在學院只習這一學科一門課程的學生就能看出其對一般知識領域的重要性。這正像一套拼圖玩具，只有不全的零塊，希望能湊成完整圖畫一樣。文理學科數學課程，應就人類知識和文化的系統加以施教。

教授要知道數學本身對非數學專業人員而言，並非重要的學科。即使最優良的專業數學家，有些人也不承認這一學科極為重要。牛頓就認為宗教更不可或缺，他辛苦從事科學工作的理由，只為顯現上帝的創造物。當然，牛頓不過是一位謙虛的物理學家。高斯推崇倫理和宗教高於數學，不過高斯也不僅是數學家，同樣具有物理學家和天文學家的地位。威耳的話——說來出人意料之外，人最成功的創造，是在最不重要的知識上，如數學——值得重述一遍。

為什麼數學教授只教文理學科學生無意義的教材，不管數學的真正文化價值？可悲的事實是，大多數教授自己也不知道這類價值。有些教授在數學創造力方面像強而有力的火車頭，但只能限制在軌道上。他們的工作不能跳出自設的心智溝槽之外，天真的認為自己珍視的價值明白確當。如若將科學上的應用也包含在內，恐怕為學生提出的問題所窘，因而加以擯棄。這些秀異份子，自我陶醉的數學家，表現了自己的價值觀、好奇心和精心造作的問題，完全不宜作為任何課程的教師。

指責大多數數學教授文化上的偏狹，似難置信。不過，要知道數學大部份課目是技巧性的，可以學得極為熟練，正像精細傢俱木工是一般木工裡最熟練的一樣。如若發覺一位傢俱木工既沒有文化修養又不是好教師，自不必感到驚奇。優良研究人員並不需要，通常確實也不知道數學更廣大的價值，當然大都不關心教學的藝術。這些教授告訴所有學生這一學科的價值，只是他們作為專業數學家所看到的，從未對他們自己珍視的價值發生疑問。他們希望學生欣賞抽象、謹嚴推理、邏輯結構、晶體一樣純淨的數學概念、以及想像中證明和結果的美感。非歐幾何，近代知識史上最富

戲劇性的驚人事件，在他們看來只不過是另一項課目。

這類教授形成的損害，不僅打擊學生而已。由於他們全神貫注於自己的研究，對所習專科以外任何事情都不注意，甚至輕視。這種態度又使年輕教授感到氣餒。年輕教授中有不少人中毒尚淺，還確認有真正的文理學科課程的需要，但怕老前輩當他們專務於小者、近者，因而拒絕採取任何行動。他們被迫相信任何談到音樂或哲學的話，都有虧於數學教學，也不是實際訓練未來數學家的真正職責。所以就感覺氣餒，不肯捨離通常的老辦法。

教授在文理學院施教，原本在致力教育學生成為完整的人，並逐漸培養其興趣和態度，而本身竟對和自己學科有密切關聯的資料，全無興趣學習，實在是悲劇。

史諾（C. P. Snow）在他的著名演講「兩種文化及科學革命」中，痛惜有分隔科學家 and 人文學者的鴻溝。前者輕視人文主義文化，反以這種無知為得意，而自趨凋萎。後者如意的想法則認為科學並不是文化的一部份，只是將實在世界機械化。對科學事業的性質和目的，既不求了解，更沒有同情，還可憐科學家連一本文學名著都不認識。史諾的批評着重人文學者，他們自命對文化的興趣在文化整體，却認為探究自然並不重要。事實上，科學家，尤其是數學家，更應受嘲罵，才比較公平。不能期望他們說明所教學科在人生方面的使命。但他們有機會，更有義務，對每年約兩百萬的大一學生提供文理學科課程，並使他們自己和學生都能明白所教學科的意義和重要。可是，他們未能履行這項職責。

修習文理學科課程的學生中，頗多智力很高的青年，是造就心胸開濶、有教養人士的最佳候選人。他們將會不受思想偏狹的阻礙，不僅在兩種文化，更在所有知識相互關係之中充分活動。甚至有些人能成為現在少見的一種從政人員，即對科學家的作為能有某些觀念。數學課程應當針對這種目標。

數學家正在自掘墳墓。學生要求受中肯而有關聯的教育的說法，往往不太明確而有系統，但就數學而言，實有充份理由。學院裡，一般必修的

數學課程，正在迅速消逝之中。數學家不僅失去工作，而且在文理學院裡，不再是有重要性的角色。僅僅說數學已經教了許多世紀，並不能保證會繼續保持下去。拉丁文和希臘文兩者，是形成西方文化最有貢獻的文化。拉丁文，約在一百年前，還是受教育者的國際語言。這兩種語言，在現在教育裡實際已經消失。甚至學習古典希臘和羅馬文化，也是同樣情形。許多數學家已經發覺，文理學科課程表上有除去數學的危險，更有一些人，日益關切公眾對這一學科的意象。不過，還顯然不夠促使他們起而運用已在手中的最好媒體，以改進意象。

蘇格拉底（Socrates）被判死罪，由於敗壞雅典青年的道德。讓數學降格的教授，使學生怨恨這一學科，或加深原已存在的怨恨，甚至有許多例證，竟使學生心智受傷而反對一切學問。對這些教授，又當受到什麼處罰？大學將文理學科學生的教育完全委諸專才或研究生，而他們正是活生生否定開明教育的人，大學對這一點，又當如何解說？

## 第七章 純正的數學家

我認爲數學最重要的特徵，事實上是自然科學，甚至可說跟任何科學有關，在較純粹敘述爲高的層次上，這些科學可解釋經驗。

紐曼 *John von Neumann*

直到約一百年前，所有數學家都接受紐曼對數學的概念。自古以來最偉大的三位數學家——亞基米德、牛頓和高斯——的科學成就的確比數學多。事實上，他們就常提出或描述各種應用，以證明數學研究是正當合理的。即使常被視爲純粹數學家的賈可比（*Carl Jacobi*）、威爾斯却斯（*Karl Weierstrass*）、里曼等人也不僅常常應用數學，更致力於從數學本身去澄清、精密化和擴展已有的應用理論和技巧。這並非否認其中有人會爲美感價值、或智識難題所吸引，而從事像數論這樣的科目。不過，只要計算一下他們花在純粹美感科目的年數和用在有關科學的年數，就能決定他們認爲那種研究更重要。

今天情形大不相同。雖然近時最偉大的數學家——威耳、希爾柏、克萊因、潘加瑞——會支持紐曼所說數學的特性，但是現在只有十分之一的數學家專心於物理和社會科學的問題，他們大都在政府或工業界的實驗室服務。教授中約有百分之五的人在做應用工作，其餘完全忽視科學，不研究任何有關問題。數學家看見上帝的手讓行星和恒星運動的日子，已經一去不返。科學和技術的擴展至少和數學同樣多，加以現在社會和生物問題

的研究也用到數學，根據這些事實，上述逆轉的情形，尤其需要有所解釋。

其中一部份理由，我們已經談過，即教授熱衷於出版著作。原有應用領域——力學、彈性論、水力學、電磁論——已經研究一、二或三個世紀，尋找特出問題不再容易。較新領域——量子力學、磁流動力學、固體物理學、氣象學、物理化學、分子物理學——需要先有廣博的物理學背景知識。至於社會和生物科學則更為複雜，難住有最佳頭腦的人而不能有所成就。因此，教授，尤其是年輕人，爲了升級和永久教職，用什麼東西來出版？答案顯然是從純粹數學領域內，找到某些專門科目，發明一些可以找到解答的問題。由於期刊學誌的編輯和教授來自相同環境，這些不自然的研究，和那些最有深度的數學科學論文一樣，也同樣有刊出的機會。

這種研究性質的變動，對教學法有何影響？結果是大多數數學教授不再教數學在科學方面的用處，也不教如何將數學應用到科學問題上。或許微積分教學提供了數學和科學分離最好的實例。微積分是應用數學的核心，而且是僅次於文理學科課程，爲學生修習最多的學科。未來的工程師、物理和社會科學家、保險統計專家、技術人員、以及修習醫學和牙醫的學生，都要學習如何應用這一學科。那麼，教授如何教微積分？

在本世紀初四十年間，微積分課程用機械式方法教一連串的數學技巧，由學生模倣去做。學生學會解題但不必思考。當然，這樣的課程對學生既不能有所幫助，更不能有所啟發。不過，就當時美國數學知識的水準來看，所能期望的，也只有如此。到了成群學生湧向學院，而接受學院教育又成爲獲得良好職業或專業職務的先決條件之後，微積分課程不具有意義，更屬明顯。雖然，教授對數學本身的知識更豐富，但並未準備配合學生興趣和需要去教微積分。從隨後引起的扭曲和偏差，顯示現時教授未能善盡職責。

直到1945年，修習數學的學生都是先學解析幾何，再學微積分。解析幾何討論一項重要新觀念，即曲線和方程式的對等關係，這一觀念在微積分裡廣被運用。後來，爲「改進」微積分課程，數學教授決定一開始就教

學生微積分，在有需要時，才教必要的解析幾何。解析幾何因而得到赦免。兩者合併就是要學生同時學兩種主要技巧。此外，學習解析幾何，要用到代數和三角。原先在微積分之前先教解析幾何，學生在學微積分課程時，對必需運用的工具準備得比較好。將解析幾何附屬在微積分課程裡作為一項課目，剝奪了學生迫切需要的背景知識，以致大都學不好。

教授對這種困難，又「找出」補救辦法。決定在微積分課程裡再加一些代數和三角，連同解析幾何一起講授。這一措施後來證明效果更壞，教授於是又退回原路。現在將代數、三角、解析幾何合併為一或兩學期課程，稱為“微積分先修課程”——藉狡黠的語意學花樣，以避免承認原先的錯誤。

有些教授採取另一種辦法。除了將代數、三角、解析幾何併入外，更用嚴謹方法教微積分，即理論和技巧一起教。他們顯然相信這種步驟能使學生了解微積分。但是微積分的理論極為複雜。最傑出的數學家，從十七世紀後期，牛頓和萊希尼茲的研究，到十九世紀早期哥西（Cauchy）的研究，都在努力想了解微積分的邏輯基礎。哥西首先從正確起點獲致突破，直到五十年後才由威爾斯却斯完成穩固基礎，澄清各種困難。當然，這項理論不易為初學的人領會。可以確信，就連那些相信初學微積分的學生能吸收其理論基礎的教師本人，在他們自己做學生時期也曾為這項理論困窘失措。但是，經過多年研究，終於了解這項理論之後，他們竟忘記自己的經驗，反而都有傳播真理熱誠的使命感。

對任何新學科，恰當的教學方法總是直覺的。嚴格的邏輯基礎，只是將圖象、物理實證、特別事例的歸納以及純粹試誤的結果，經由心智領會所得，事後加以人為造作的重建。微積分理論對了解這一學科的幫助，大約和化學燃燒理論對如何駕駛汽車一樣。從理論施教的方式，在1960年代中期達到全盛時期，現在應予捨棄。

戰前純教技巧的方式，未曾成功；加入代數、三角、解析幾何，亦未改好；再將謹嚴性包含在內，立即發覺更壞。數學家有什麼可行的好辦法？原初設置微積分先修課程，補充了微積分所需的基本教材，所以他們想



得到是將微積分以外的教材也包容在內。於是一點點的線性代數、向量分析、微分方程，以及其他課目——有些和微積分並無關聯——也都包含在微積分課程裡，這使微積分現在成爲各課目的大雜燴以及不相關聯技巧的混合物（參閱第十章）。

在所有這些策略裡，教授就是不肯採取既能顯示微積分意義，又能達到原來目的的一項措施——藉微積分引向應用數學。數學本身和微積分都是符號的迷宮以及符號的操作，沒有意義和目的，只是實質的影子，其意義正和未曾聽過樂曲的人所了解的曲譜中音符的意義一樣。符號沒有生命，但如做恰當的解釋，我們可以說，符號有幾乎能多方面影響人生的重大力量；只有應用能夠提供意義和動機。修習微積分的學生，大多數是未來的工程師和物理科學家，既然有心用到微積分，那麼還有什麼比微積分得到結果的實例，能給予他們更好的見識？

微積分不僅對應用數學提供最佳機會，也顯示物理的論據如何促成更深入的數學結果。例如，拋球到空中，先升起再落下。在所經路線的最高點時，其速度必爲零，否則將繼續上升。由於速度是距離對時間的變率，這一物理事件就暗示一個變數對另一變數的變率，在第一個變數爲極大值時，必爲零。這是微積分的基本定理之一。

然而，凡是要引用可提供動機、意義和應用的物理問題，常會有一種障礙，那就是大多數數學教授根本不懂科學，又不肯爲充實自己去學習。少數有足夠知識，能提出最簡單物理應用的人，又怕無法解答接踵而來的種種問題。

許多教授認識到微積分本身既枯燥又無意義，但又沒有準備提出真正的應用問題，所以就假裝來做樣子。現在以下列問題爲例：一物體按照加速度  $a = 5t^3 - 3t^2 + 4t - 16$  運動，求其速度。知道加速度再求速度，當然是微積分的應用。不過，宇宙裡有那一樣物體照着所述的加速度運動？或許是喝醉酒開車的人吧！有些教授比較實際一點，知道接近地面物體的運動，如若不計空氣阻力，受到向下每秒三十二呎的加速度，就提出有關這種加速度的運動問題，認爲有意義。不過這類問題太簡單，不夠顯示

微積分的力量。談真空中運動應該接着就談更實際的大氣中運動問題。跳降落傘的人如不靠空氣阻力，則跳一次之後，也就不需要再依靠任何事物了。或許只談真空中運動的教授，準備學生生活在沒有大氣的月球上，不過那要先說服他們地球上的生活難於忍受。

微積分教科書裡還提供另一種「真正」的應用問題。某人六呎高，以每秒五呎速率從路燈處走開，問在此人離開路燈十呎時，他的影子加長有多快。這項問題討論的只是實在界的影子。

教授又在問題中引用一些物理名詞，如重心（center of gravity）和慣性矩（moment of inertia）等，不過並沒有告訴學生這些概念的物理意義和用處。結果這些問題的重力，使學生一時間，甚至幾小時之內都在發呆。（重心是重力中心的簡稱，gravity為重力，moment又有片刻，一時間之意，inertia又有不活動，遲鈍，發呆之意。此處用字之不同含意作雙關說法——譯者註）。

當然，好奇心能誘使一些人解答任何問題。不過，好奇心不僅會喪命，也會毀掉對提出無意義問題數學課程的興趣。教微積分不談真正應用，就像請人坐在桌旁等吃飯，但不上飯菜，又像教文法，但決不提文學作品一樣。

教授為什麼願意教造作、枯燥、沒有意義的應用問題？微積分教科書採用這類問題已有五十年以上的歷史。現在的教授做學生時，已經學會如何解答。如果沒有壓力要改進課程，為什麼要自找麻煩去發掘更有意義的新問題？還要再費很多功夫學會如何教學生？年復一年，重複令人生厭的同樣教材，誠然煩人，不過，既然所有教學工作都是打雜，越快交差當然越好。

微積分課程的缺失，是研究生和大學部學生所有數學課程顯明缺失的例證。雖然學生修習數學的主要理由是為了致用，但只有很少數大學部和研究所提供應用數學課程。也有名為「應用數學」的課程和教科書，但內容實在貧乏得可憐。提供可應用的數學課目，如微分方程，最多只告訴學生這一課目能用在什麼地方。至於分析物理現象以決定那些因素或特點可

以不必考慮，那些必需列入數學式內，均略而不提。將物理事實轉變為數學語言的方法，更完全不教。因為不討論如何處理物理問題，所以由數學了解物理現象的好處，也就無法獲得。此外，大多數教科書的內容都是將數學各領域內能加應用的零星教材拼湊而成，沒有一項課目有深入研討。這類教科書給學生的印象只是困惑。學生不斷從一個課目換到另一課目，速度快得沒法記得住。正像到歐洲作一趟旋風式的旅行，十天跑十個國家，回來以後，連艾菲爾塔在巴黎還是在布拉格都無法肯定。

數學家當然覺察到應用數學的存在和重要，也對忽視這一課程的指責很敏感。他們主張提供純粹數學課程的理由是：要教學生如何建立模式，並用以解答實際問題。好像解決一項新的物理問題，應用數學家或科學家要做的事，只是查閱檔案找出適合這一問題的一項模式但這樣建立模式的方法完全浪費時間。主張完全任意的數學創造，更顯示對應用數學有關事項並無所知。

上帝可能用數學設計這個世界，不過上帝顯然不想讓這項設計易於為人了解。大自然沒有將數學炫耀在自己臉上，要將真正物理問題數學化，必需經過幾項重要而困難的步驟。任何真實情況可能包含幾十種因素，其關聯性一定要加考慮。假如研究一個球的運動，顏色當然不必考慮，但形狀和大小不一定就能忽略。另一方面，假如研究光從某一表面反射，或經由某一透明材料傳透，則表面或材料的顏色可能就很重要。研究行星繞日的運動，行星和太陽均可當作是點一質量，即各別質量可以視為集中於一點。理由很簡單，因為兩者的大小和其間距離相比很小。另一方面，假如研究月球繞地球的運動，則地球的形狀和大小一定要加考慮。是否考慮太陽對這兩天體的吸引力？端看要解決的問題而定。如若預測地球上的海洋潮汐，太陽的吸引力確屬重要。假如研究地球軸的運動，即通過南北極想像中一條線的方向改變，則太陽的吸引力可以不問。需要的答案越求精確，對相關因素的考慮越應慎重周到。摒除無關因素以簡化問題，實在是很重要的步驟，先應有洞察能力，再因經驗而逐步加深。

問題簡化之後，一定會應用到物理原理。例如，對研究地球繞日運動而言

，引力定律是一項基本原理。這類原理通常由物理學家提供，不過，將有關特定問題的物理原理以及相關資訊轉化為數學語言和概念，則是數學家的事。很可能沒有現成概念可用，或者還有待創造。事實上，正由於研究運動問題的需要，才促成微積分的創造。在解決新問題時常會增添新概念。

數學式列出之後，下一步就是解答一項數學問題。有時候，應用數學家很幸運，這一數學問題在已往研究中已有解答。如若真有這種情形，可能相信獲得這項解答，原先是為了解決一項實際問題的。可惜，更常見的情況是全新的數學問題，那就要做原創性的研究。

應用數學中還有其他問題和手續，例如，應用解答時其近似值的適當與否，不過，主要一點是數學模式不能事先建立，用到時才有需要。數學涉及的實際問題太過複雜特殊，我們不能預鑄有用的模式，任憑想像召之即來。一項物理問題到了數學家手裡，正像一塊被渣屑污泥覆蓋的石頭，要由數學家除去泥渣、鏟掉石屑、磨光石頭、最後才能得到像光輝寶石的物理真理。數學的應用是一種藝術，教授這種藝術更是一種藝術。

我們不會期望學生能解決新的應用問題，可是將來在專業工作裡，需要他們去做，所以，有關整個過程的一切，都應教給他們。這正好證明騙學生相信只要學會數學結構和方法就夠了的說法是錯的。教授辯稱學習數學模式為了學生應用數學預作準備，這種話，說得好是在打如意算盤，想為自己的無知找藉口，說得不好聽就是存心欺騙。

如果有人提出挑戰說：未來可能用到數學的人，對數學本身的價值並不重視，數學教授就會反駁說，學生會從其他途徑學會應用。可是既然要學生學習定理和技巧，而其價值却要等一年、兩年或多年後才顯示出來，這是教學法上的嚴重錯誤。這種保證不能激起動機和興趣，也不能為課目賦予意義。懷海德曾勸告我們，不論學科有什麼價值，一定要在當時當地就引發出來。

還有另一項理由常被教授用來反對教應用，即增加學生負擔太大，他們必需學數學和相關科目，例如物理，又要學兩者間的關聯。不過，這種理由似是而非，因為慎重選取的應用，需要數學以外的背景知識並不太多

，很容易包含在數學課程裡。並且數學教學由於和應用相關聯，提供了學習動機，反而因之加速，這是數學本身辦不到的。概念僅有的意義，得自創造這一概念的數學家；而學生從課程裡，例如微積分，找到的僅有意義，得自物理的，或真實的情況，兩者同樣重要。

如若教實際應用，則課程進度規定要講的就講不完，這又是教授的一項理由。即使這一理由很有力量（事實上確實有些力量），但是這一見解究有什麼意思？教授講全了課程綱要裡課目，學生却被排山倒海而來的觀念和技巧所埋葬，不見天日，這種見解只能淹沒學生而已。

應用數學對科學和工程，有最重要和最廣泛的用處。基於這項事實，如若缺少應用數學的課程，正和美國政治領袖缺少誠實同樣可悲。可是，大多數數學家不再有提供應用問題的能力，反視為健康身體的傳染病，避之唯恐不及。對主修科學和工程等學系的學生應盡的職責，數學系決不肯妥協，久已惡名昭著。他們的教學總好像是說數學就是我們知道的一切，也是我們需要知道的一切。不幸，大多數有聲望的大學，容許教授到了自命權威獨立自主的地位時，喜歡教什麼就教什麼。課程綱要和課程安排順序，對像數學這樣累積性的學科頗為重要，但却為神氣活現的人物所憎惡和藐視。教科學和工程學生課程，教授常用新進教師或研究生代替，因為他們不能自主選擇所教課程，這是以假貨騙人。

教授真正教些什麼課目？除了像微積分一類課程內容已經規定外，他們最愛教的必然是自己專精的一門，這要看他們的研究而定。所以不必驚奇所列課程，如數學邏輯、抽象代數、拓樸學、數論、泛函分析以及公理論，處於優勢。先不談這些課目的技術性，重要的是今天流行這些課目，只不過是數學的一面之詞，完全是純粹數學，也就是完全沒有應用。教授寧愛純潔而不願與科學聯姻。

教授是專才，易以自己的專門科目為媒體來看數學世界。當然，應有某些課程提供給未來的純粹數學家，不過，所有數學家都應該知道，數學的主要價值是數學和科學的相互關係，以及從這種關係所獲得的驚人豐碩成果。正是人顯示心靈魔力以及數學如何在人的心靈和真實世界鴻溝上架

設橋梁。或者，像史丹福大學數學教授謝費爾（Max M. Schiffer）指出的：

紙上工作能和我們生活的世界關連起來，這是數學的奇蹟。用鋼筆或鉛筆，我們能將尺量到恆星並稱出月球的重量。這種可能性使得應用數學具有極生動的魔力。還有什麼學科能使自願做數學家的人——至少在開始時——發生更強烈、更自然的興趣？對非數學家又如何？不肯引介這一學科，使他們無法欣賞文化遺產，無疑是不當的。從最廣的意義來看，數學這項工具，不僅助我們了解，還能改變我們生活其中的世界。

主修數學的其後可能自由研究純粹數學中任何一門，但若不瞭解這一學科的主要任務，不論他後來寫出多少研究論文，都屬無知。適當討論科學方面的應用以及某些物理課程，應為數學家教育的一部份。更因未來的數學家，大多數可能成為大學教師，更應有教未來科學家和工程師的準備。

典型的數學教授未曾要求修習任何其他科學，這責任在於研究所的教授。他們，除極少數例外，是一群純粹數學各領域的專家。這些大學教授面對教育學生成為未來的科學家、工程師以及教師的任務，却拒不實行，自屬不負責任。如果他們任職於工業或商業機構，一定被解僱。可是，大學裡從來沒有發生這種解聘情事，因為數學家就整體而論都差不多，即使系主任也是其中一員，所以不願採取行動。許多教授自稱對工作頗感自豪，作為教師也盡了職責。不過他們的作為顯露了言詞的虛假。

錯誤的所在，不是教授不知道教什麼，而是不知道如何將所教學科和其他知識及生活關連起來。通常是教授而不是學生在學校內外規避教育。教授並非存心不誠實或覺察到教學法的不當。不過，由於教學沒有明確標準，教授對教學法的無知，以及對課程綱要的規定過度拘束，因而產生的結果和出於無能及不誠實並無差異。實際施行的方式，既未經重行檢討，而真正提出教育的挑戰，也未受重視。

學生進入學院的目的，在謀求未來的出路，自有理由要求辦到，而學

院暗裡承認這項目標，却又明白宣稱自由教育。對以就業取向的學生，如願為統計學家、保險統計是和科學家，所開數學課程，一定要和其他課程同樣注重。當然，職業或專業的興趣，不免和純粹學術興趣衝突，但不應埋沒或忽視前者。可是，缺乏遠見的教授，強使學生接受自己的興趣，結果是那些課程對學生和社會均無益處。學生常被責為抗拒知性，其實，他們只是抗拒越權和漠不關心的教授。這些教授以學術自由為名，其實僅顧到自己。

數學家在這主要成就來自科學、解決重大問題亦多賴科學的時代，竟捨棄科學而過着強使自己從真實世界流放的生活。一世紀來為追求日益純粹的數學所蒙蔽，這些教授已喪失閱讀大自然這本書的決心和能力。正像斯威夫特所著「格利佛遊記」中，格利佛在去拉普大途中遇見的數學家，住在浮懸空中的島上，將地上社會的問題留待他人解決。

他們捨棄科學已到何種程度？近幾十年曾任耶魯、哈佛及芝加哥大學教授的史東（Marshall Stone），說得最好，他說：

不過，事實上如將數學作為一種遊戲，同樣能夠玩得很好。這種遊戲的玩法是用無意義的棋子，按照純粹形式和完全任意的規定去做。由於在許可規定範圍內，能發現和發展出各種不同玩法的複雜範型，這種偉大的魅力使遊戲本身含有內在的興趣。數學家對他們的學科日益採取反應這一觀點的精神。……我願特別強調，以一種新的精神來教數學，這種精神應和激發、注入近代數學家工作中的精神一致。不論這些近代數學家所關切的，是數學本身或為數學本身，或者將數學當作了解我們生活世界的工具……事實上，為真實世界的各小部份建構數學模式，雖然是應用數學家最主要的任務，但在公理論中並不算什麼，只可視為一項練習……將數學內容形成為可以接受的現代課程表後，仍然要注重激發這一學科的精神以及用於教學的做法。現在雖在初期階段，但絕對應該要求努力使數學的統合性和抽象性兩者均能顯現。

史東的話並非沒有遇到挑戰。柯倫特教授，曾主持希特勒以前德國哥

廷根大學數學中心，其後又創設並主持現稱為紐約大學柯倫特數理科學研究所，早就對這種消除數學本質要素的說法，公開指責：

說數學沒有什麼，不過是從定義和假設推出，由數學家自由意思所創，整體一致的結論系統。這種獨新的話，暗含對科學真正生命的嚴重威脅。假如這一描述正確，數學不會吸引任何有才智的人。數學成為運用定義、規則和三段論法的遊戲，沒有動機和目標。如若說知識份子從突然而起的念頭，能創造出有意義的假設系統，那是欺人的片面真理。只有在有機整體的責任約束下，只有在本質必然的指引下，自由心靈才能夠獲致有科學價值的成果。

柯倫特再對前述教學法各種罪過加以攻擊：

或許，這種片面看法是教育的最嚴重威脅。見識廣博深具學養教師的教學，能使人激勵，更為社會極度需要。課程表誠然重要，不過改革的呼聲不應用來掩飾對實質的侵蝕，為無靈感的抽象作宣傳，使數學陷於孤立，用開答式教條主義的方法來廢棄蘇格拉底方法的理想……如若承認數學、力學、物理學以及其他科學間應有密切關聯是義不容辭的原則，自當由未來一代教師熱誠接受。總之，對學校和學院的各種缺失，無疑的，必需有根本而重大的補救。幫助這種革新是每位科學家莊嚴的職責。

大多數數學家放棄應用數學，不僅打擊教學法，也威脅到數學本身的真實生存。真實世界發生的問題是數學不可缺少的血液。數學必需保持為廣濶科學河流裡重要的一支，否則會成為小溪再為沙土所掩沒。整個數學史都在表明這一學科，經由物理科學得到啟發、活力和成果。

至於應用數學對技術和人類的價值，也不應忽略。現在一般人每週平均工作三十五至四十小時，不必八十小時，居住在良好舒適的房舍，享受高級唱片和電視，接受有疾病醫藥治療，至少生命得以延長。以上所述和另外的種種利益，大都根源於數學。

一提到應用數學教學方案，像是許多教學方案裡的一種，或者好像數學有兩種，純粹的和應用的，又有些稱為僧院的和世俗的。其實這項方案



是對現在流行辦法一種讓步，對數學和數學教育都是誤解。實在只有一種學科：數學。這一學科的主要功能，以及社會加以支持並作為教育中主要角色的重大理由，在於數學確能幫助人了解週遭的世界——物理的、社會的、生物的及心理的。直到現在，主要成就大都有關物理科學，不過從文明的時間尺度來評判，數學還正當青年。

今日和近年來的許多科學家，對上述評價頗有爭辯。他們說，數學是數學家所作所為，大多數數學家既然只對這一學科本身有興趣不顧其餘，那麼和其他領域的關係，也就全不相干。無疑的，其中許多人由於不知道數學卓越有力的用處而漠不關心，說的也是真心話。不過，他應當更注意馮紐曼所說的：

一門數學學科如若遠離經驗的來源，或者它是第二代或第三代，只受到實在界觀念間接影響，就會陷於嚴重的危險之中。這門學科將越來越純粹的唯美，越來越純粹的為藝術而藝術。假如這一領域還為相關學科所環繞，有密切的經驗聯繫，或者假如這一學科在具有判斷力的人影響下發展非常良好，那還不一定是壞事。但和經驗來源距離很大就會有嚴重危機，或經太多的「抽象」同種繁殖，將使一門數學學科有退化的危險……無論如何，到了這一階段，唯一救治之法，我看應當是回到來源以恢復活力，即再注入一些直接的經驗觀念。我相信這是保持這一學科健全和活力的必要條件，即使在將來這一想法仍然一樣可信。

大多數數學家放棄科學，是否意謂科學將失去數學？完全不是，未來將有像牛頓，拉普拉斯、漢密爾登（Hamilton）這一類的偉人，創造所需的數學，和過去所做的一樣。從前的這些人，雖尊稱為數學家，也曾任數學教授，其實根本是物理學家。今天，這些人為數學家驅逐，却在科學院系裡找到安身之所，不過，今天還有很多才智之士失掉為科學和必要的教學法服務的機會。

數學系未能使修習科學、工程、社會科學的學生滿足，已深受原本預料到的影響。許多大學的物理科學、社會科學和工程各系，已開設自己所

需的數學課程。某些學校，統計和機率課程分別在許多系裡開班。幾乎所有學院和大學將電算機科學和數學分開，並單獨設系。顯然使用數學的人認為數學太重要，不應交到數學家手中。如若這種做法再擴展下去，數學教育本身就到了盡頭。雖然有些數學教授對學生被人搶去，和自己領域為人接收，發出怨言，但另一些人，却奇怪的表現得特別大方。他們的反應是，那很好，我們不必教有用的數學，可以選自己喜歡的去教了。

雖然由其他院系辦理數學教學，似乎給了學生更有益的各種數學課程，不過，這並非切合實際的解決辦法。這將引起課程不斷的重複，使大學無力辦到，不過反對理由，還屬次要。事實上，更重大的影響在於數學、物理、經濟以及工程的各學門，現在都是很廣大的領域，一位教授就是要精通任一領域的一部份也很困難。例如，一位物理教授可能了解數學某一特定部份，但不易有效的教數學。他能在物理領域內教得很成功，已經很好。假如必需運用數學的幾個系，合聘數學家來教他們希望教的數學，可能因為無需專任教授的貢獻，就找研究生或代用教師。即使聘用專任教授，由於混雜在非數學的系裡，陷於孤立不能和同行接觸溝通、相互激勵、相互學習而獲致進益。按學科分系的組織自有缺點，不過這是我們所能有的最好方法。數學太重要，不應當零零碎碎的來教。

因為數學家忽視應用課程以及教學不良，結果使得進入學院主修科學的學生，一半以上的人不是退學就是轉系。工程學科的學生有一半未能畢業。當然，還有其他因素，但是不良的數學教育實為主要原因。這些課程成為致命武器，滅絕了知識方面的興趣，甚至也斷傷了學生的學術生命。

閱讀當前數學期刊，會發覺有人主張應為大學部學生和研究生，設立應用數學教案，可能因而推斷數學家，現在開始真正關切他們的職責了。可是，細加考查就會明白，所以忽然發生興趣，並非由於任何對學生需要的認識，或對提供的不良課程自感歉疚，而是出於自私的動機。現在學術界可提供給數學博士的位置，遠少於研究院、所產生的博士人數。不過，工業界及政府機構確需聘僱應用數學家，這樣，當然促使研究生和博士為可能獲致的職位而進行準備。就是接受這項建議，其中大多數人在獲得適

當訓練方面，還是有很大困難。

如若從教學法來評判數學家，可以採取兩種立場，要看對他們是心存寬厚，或者刻意批評而定。傾向前者，就會認定他們是太過內省，以致脫離世俗，由於深愛自己的學科，切盼數學進步，因而超越通常心態而不重視正常問題；如果傾向後者看法，會認定他們偏愛自己喜歡的價值和興趣，顯然自私，過份集中注意於他們本身，文化修養偏狹，無視社會利益和學生需要。不論從上述那一種立場來看，教授的錯誤埋沒了學生，正像醫師的錯誤埋葬了病人一樣。

雖然如此，教授教純粹抽象數學並堅持很成功，也對我們大家有些幫助：使我們確信有天堂和天使存在。當然，學生一定要是天使才會吸收教授教給他們的東西，至於教授，滿腦子的幻想，顯然會自天堂得到維持生命的營養。

## 第八章 方向錯誤的中學教育

偉大的上帝！我寧願接受陳腐教條教卷的異教徒；我切盼能看到一線閃光以減輕孤寂。

烏茲華斯 *William Wordsworth*

在這個變動快得令人昏亂困惑的世界裡，數學教育却提供了不動的界石：中學數學課程表。由大學的意理和做法所決定的這項教案，不僅不動，而且硬化，幾乎無法動搖。可是，中學課程表確已過時。現在就讓我們加以檢討。

九年級全部教代數，這一科目幾乎完全是一連串不相關聯原子狀的各種步驟，混雜在一起的許多單元包括：因子分解、多項式運算，例如  $X^2 + 5X + b$ 、分式運算，例如  $(2X + 5) / (3X + 7)$ 、指數定律、以及一個或更多未知數的各次方程式的解法。就整體來看，這種方式對數學本身最不合宜，因為代數是工具而非目的。這些是大部份數學的拼法、文法和修辭法，但不是文學。假如要求學英文的學生，用許多年來準備閱讀——正像學數學的學生要用八年學算術、一年學代數——却從不引進閱讀的樂趣，他們將會有什麼反應？

除了代數本身作為工具而非目的這項事實外，還有幾乎困惑過每一個人的特別困難——字母的使用。如同數目符號是小學兒童的障礙，字母符號成為中學學生的障礙，說  $3X = 5$  畢竟不像說  $ax = b$  那樣可怕，式中  $a$  和  $b$

爲任何數。從原理來看，這一觀念很簡單。代數說的是男人和女人，而不是約翰和瑪麗。一般化的男人和女人的意義，只有對個別男士和女士有許多經驗的人，才會懂得。對照代數來講，必需對數目的各種運算有許多經驗。可惜，學生在被推進代數裡的時候，和算術多半只點頭之交而已。

在大約公元 1600 以前，也就是在希臘人產生第一流數學後約兩千年，數學家從未想到用字母作係數。這一事實本身應能提醒教師，學生會受到字母的妨礙，需要特別方法使他們能接受數目轉移到字母。

代數本身雖然既無意義也無目的，但是學生在十年級所學的幾何，確有直觀意義，可是沒有目的仍很明顯。幾十個定理照邏輯順序一一證明，學生看到的似乎是幾何的目的就是儘量多證明定理。學生的學習限在呆板遲鈍的思想列車內，決不准出軌。至於爲什麼有人需要這些定理？以及這些定理和證明究竟如何想出來的？根本沒有談到。

十一年級課程表，重複九年級科目，爲了學生沒有學過那些教材，另外加添更多代數的方法和步驟，再引進三角——在三角學種種的題材中學生冒迷失自己的風險，學習許多恒等式 (identities)。(identity 意謂恒等式，又爲認同。不能認同將迷失自己。學生對恒等式不能認同，有冒迷失自己的風險——譯者註)

十二年級的內容，尙未固定，修習的學生比較少。所用教材，不論是立體幾何或微積分初階，都由教條方式施教，並不比上述各科目更能使學生獲得啟發或產生興趣。

這樣的課程是怎麼來的？它是在十九世紀由教授所形成。事實上，前面已經看到（見第二章）現在美國中學所教的科目，最初只在學院裡講授後來，逐漸下移列入中學課程表，但仍保持在學院層次施教的主要內容。在剛轉移的那些年中以及後來很久，一個委員會接一個委員會，重行檢討這項課程表。這些委員會建議的細節確有不同，有些人主張先教因子分解再教指數，另一些人正好相反，不過，基本上全都同意這一傳統的課程表。他們所以偏愛這一課程表並加以接受的理由，全是老套。例如認爲這一課程表有訓練心智的價值，這點從來沒有人表示懷疑。這一可疑的價值一

即數學教人思考—使得委員會不必真正關切內容是否恰當。此外，像在日常生活中的用處、爲進入學院作準備（在這些科目移到中學之後）、學習文化最高貴學科裡高等真理等，也被提供作支持現狀的理由。似乎從來沒有人懷疑過： $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$  能使任何人上進提昇。

近年來，曾有一次改變。傳統教育的無效，因二次世界大戰時期的需要而更顯明，因而刺激一些大學教授致力於改革課程表。不過，這些教授比十九世紀或二十世紀早期他們的前輩，更不了解中學教育。所以，這些改革者的想法，也是照着通常宣稱的數學教育價值而行，例如，爲學院修習的數學作準備。他們的貢獻是加進嚴謹性、一般化、抽象、以及強調傳統內容的結構性。前面各章列舉反對這些特點的理由，都可用到中學課程表上，且更有力，因爲中學生還在尋找「有關數學的一切是什麼」？

例如，想一想結構，什麼的結構？答案似乎是抽象數學系統的結構。當然，正、負整數和分數—即有理數—的集合，確有一些性質是整數單獨所沒有的，而實數也有像有理數的相同系統。這些結構正是中學生所知的一切，但並不很明白，這樣學習結構能有什麼意義？就像要求只看過一條狗的學生，要懂得各種動物的結構一樣。此外，在歐氏幾何和三角裡，結構的意義又是什麼？結構這一名詞很時髦，但是在中學數學裡確用不着。

新課程表並沒有使基本的中學教材有重大改變。由於加上嚴謹的證明以及從集合論和符號邏輯鑽到更深的基礎洞裡，更能確保課程表的僵硬。（見第六章）這些“創新”或許保護了幾處數學大廈的穩定，但也將學生更拖入黑暗的地下，不再能看到地面。在需要光線和空氣的地方，新數學又在地洞上蓋上鋼樑。這種改革遠非改進，更正確的說，是形成災禍。所幸，新數學這一荒唐越軌的行動，已成過去，我們不必再敲打枯骨。

對數學家而言，所有這類標準教材，不論傳統的或經過新數學偽裝的，都是自我顯明，但對學生而言，則是自我認罪。整個四年的學習內容，所表達的只是抽象、沉悶，令人厭煩，而本身一無意義。用懷海德的話來說，最好也不過包含一些沒有生命的觀念而已。學生遭遇到困難，自屬必然。多年以前，心理學家已經發現，人在強記六個無意義的音節一小時後

，就全部忘記。假使小學數學還未使學生厭惡，那麼中學數學，特別是代數，一定能辦到。傳統數學不幸的結果是爲人厭惡，數學家和教授一向相信，而且至今仍然相信這種課程表的價值，實在令人難以置信。當然，在某些班級裡，有一兩個學生會勤修數學，由於喜歡數學或者希望能確保升入學院。不過，數學家應當首先教我們注意，一隻燕子並不表示就是夏天。

檢討爲傳統課程表辯護的理由，其中有一項理由是說這些教材在日後生活中有用。是否一般曾受教育的人，日常生活中真的會用到這些知識？即使瞭解這些科目的數學教師，在教室之外，是否用到過二次方程式、畢氏定理或三角恒等式？老實的答案是「否」。當然，學生知道兩點之間最短距離爲直線，確實有用。不過，甚至驢子也知道這點，在離開一些距離的地方放些食物，看牠往前走的路徑就知道了。中學數學的科目（指科目本身）是沒有什麼價值的知識。其中一或兩項課目，如複利計算，可能證明有用，不過只是例外，並不能改變對整體的評估。

中學數學課程並不能教人思考，這和教師的斷言正好相反。傳統代數只教人硬記方法和步驟。幾何強調證明，好像是教人思考，不過證明是按邏輯順序安排，而這一順序完全出於人爲造作並不自然，反使學生對真正的理由感到迷惑，只好強記。學生對幾何證明的欣賞，簡化爲他們常說的一句話：幾何就是做證明，要分兩行寫。

數學教學常用的另一理由，是這一學科有美感。雖然學院中文理學科課程有爲美而選的課目，但中學層次所教的課程並不特別注意美的價值。選擇課目要根據進一步數學教育的需要，這一切說教和狂想曲都不能使得醜小鴨——如因子分解、分數加法、二次或變得有吸引力。甚至三角形諸角之和爲 $180^\circ$ ，這項事實也難以動人。如說其和爲 $200^\circ$ ，至少還是一個完整的數目。

此外，美是各有所好的問題。就數學而言，欣賞美需要某種老練。事實上，沒有多少人爲數學神秘的美所吸引，實在是社會之福。即使美國只有十分之一的中學生決心爲數學而研探數學，美國社會也會受到可悲的影響。一位好醫師的價值，抵得過一千個爲美而研探數學的數學家。

現在尚未談到的，是擁護傳統數學的人所引用的另一項價值：智力的挑戰。是否爲了百分之一對這種特別智力挑戰有回應的人，就應犧牲百分之九十九的學生？

主張傳統課程表的人，不斷的死守一項理由，即學生爲了進入學院需要中學數學。採取這一立場的人，對1900年，甚至到1930年只有不到百分之二十五的中學畢業生升入學院，又將如何解釋？這項百分數雖然繼續穩定增加，但不到百分之五十的中學畢業生升入學院，仍然是事實。何況還有百分之二十五的人進入中學後並未能畢業。

在升入學院的人裡，最多有十分之一學生需要中學所教的技巧和定理。其餘的，不是不需要修習學院的數學課程（許多學院修讀學士學位，不要求有一門數學課程）就是只修習文理學科數學課程，現在中學數學的大部份都用不到。是否學院以一般中學數學作爲入學條件？多少年來從未如此要求。有些學院不要求任何中學數學，其餘的幾乎全部接受任何適合的兩年課程表。所以，不能以「爲準備學生升入學院」，來支持現行的中學課程表。

以關切準備升入學院爲理由，反而弄巧成拙。面對枯燥無味傳統的課程表，學生越不願修習傳統數學。在1928年，約有三百萬中學生，其中百分之二十七修習九年級代數，百分之十八修習平面幾何。到1934年，在五百五十萬中學生裡，各別百分數降低爲百分之十九和百分之十二。自1934年以後，中學生人數增加很快，但修習傳統數學人數的百分數仍然降落更多。那些依舊修習的人，只因多數學院，如前所說，要求有一些課程，雖然其實在內容並不限於傳統科目。

此外，以準備升入學院爲理由，是否會引發學生的動機？正常的十四歲學生，如何真正知道他一定會進入學院？家長可能有確定的計劃，不過種種原因可能使之改變。學生對中學課程的反應，必然是原因之一，而傳統課程難期產生有利的反應。即使面臨中學畢業關頭，許多少年對是否進入學院，還不能肯定，他們的決定升學只是由於外在壓力或環境影響。他們可能跟着朋友去做，或者選一條省力的路走。



在所有支持傳統中學課程表的理由上，主張新數學的人更加上一項大道理，說是國家需要精通數學的人，因而要求中學課程表，能更快的使學生達到純粹和應用的研究邊界。由於數學有連續性，這一目的顯非正常。

不論宣稱的數學價值，確實存在與否，計劃課程表的人，應該想到學生是否願意和能夠欣賞這些價值。由於未曾考慮預期的效果，因而結果很壞已爲衆所共知。從美國大學入學的“學力智力性向測驗”來看，那一群升入學院最好的學生，其成績一年比一年差。更多的學生却不斷的進入學院，中學至少應當達成這些價值。中學課程未收成效的另一證據，是各學院現在面對的最大問題爲設置數學補習課程。在兩年制學院裡，修習數學的學生中有百分之四十登記的是補習課程。

如若放棄傳統教材，不能不想到有些中學生將來會在專門職業上用到數學。由於在中學階段，不能知道學生未來是否需要用數學，所以主張每個人都應修習。但是只有百分之五的中學生將來確需用數學，他們的需要不應主宰一切。後面將建議達到要求的另一種方式。

要求所有普通中學生修習數學，是否一項錯誤？決非如此。反對數學教學的原因，是反對所教的那種數學，以及反對支持那種數學傳統的和流行的理由。只有美國社會力求對所有學生教以數學，但是美國對主要教材和教學理由竟完全忽視。設計和改革課程表的人，從錯誤的方向去着手這項問題。所說的價值和目的，只有教授喜歡和重視。

在考慮另外着手方式之前，應先注意小學和中學數學教育之間的重要區別。每個人必需知道一些算術和初級幾何的少量事實，就能處理日常生活。算術正和讀與寫一樣，具有相同的基本實用價值。不過，前曾指明，代數、幾何以及其他中學科目，就並非如此。提供小學的教材雖有限制，但選擇普通中學所授的教材有較大自由。什麼是普通中學教育的目的？像文學、歷史、科學、經濟學、和外國語文等課程，旨在使未來的成年人能夠過更有見識、更爲明智、更感愉快的生活。總而言之，這是文化的入門。數學課程也應達到相同目的。所以，要教的數學，應使所有學生在一生中都能受益。對真正文理學科教育的貢獻，在使學生不僅知道這些學科討

論些什麼，還知道在文化和社會裡其所扮演的角色。我們必需教的，不只是數學是什麼，更要教數學能做些什麼。

教師無疑的會問，「文理學科課程表的教材，從何處得到，包含些什麼？」前面談到學院大一學生文理學科課程內容（第六章）時，已經解答這一問題。當然，中學教案對智力水準和猜想的學生知識背景，必需加以考量。不過，各種來源可供採選的適當教材極多。下列數例，想來應該可使心存疑慮的人信服。

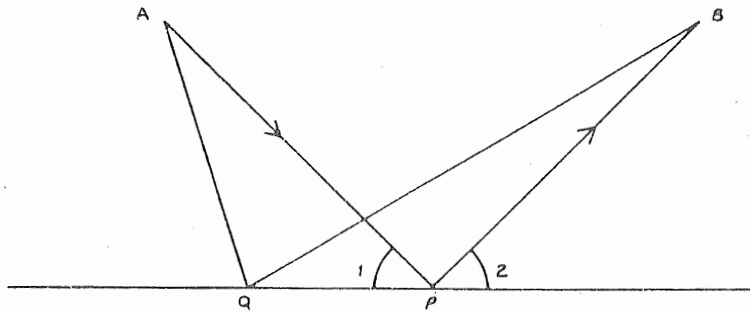
初級代數說到簡單函數，像  $y=5x$ ， $y=3x^2+6x$  等。作為純粹數學式，確是枯燥無趣，不過，這些代數式能夠而且已經用以表現極多的各種運動，如球類、彈類、火箭和太空船的運動。月球上的運動和地球上的運動呈現顯明對照，提供令人興奮的題目。落進水中物體的運動是另一易懂而又有興趣的現象。簡單函數進一步發展，就導引到引力定律以及計算地球質量和太陽質量一類不常見的事情。函數不僅是符號表現的數學式，還是宇宙的定律，包括一粒沙和最遠處恒星的行動。

代數也應用在初級統計和機率方面。關於高度、重量、智力、死亡率、收入、以及每個受過教育的人都會關切和有興趣其他事實的分佈情形，可使用這些技巧得到其重要的知識。醫藥治療的功效、產品品質的管制；以及未來商品價格、人口成長、遺傳特質（如疾病的感受性）等等預測，均賴同一工具而獲致。依據統計和機率得到的結果，其可信度亦應加以講授和討論。在學統計時，應認真注意着名的警語：「有謊言、有該死的謊言、有統計，」因為很多熱烈說出的結論，並沒有數據支持。

中學幾何有很多用處。如測定地球的大小，行星和太陽的距離，行星的週期；日、月蝕的解說；難以接觸的尺度計算，如大廈高度、峽谷寬度、湖面距離等，這些應用到的幾何學雖說很簡單，但都是值得注意的偉績。同樣的，經由幾何可以接觸到光的活動狀況。光線經鏡子反射從A到B（圖1），如角1等於角2，則其所經路徑最短。實際所經路徑APB短於任何其他路徑，例如AQB。此外，在此例中光線速度不變，因之最短路徑亦即最短時間。事實上，在所有情況裡，光都採取需時最短的路徑。說

起來，光確無生命，如何知道選擇這一路徑？為什麼尋求「效率」？這就接觸到一項由人提出的最重大原理，歷經許多世紀毫無疑問加以證實，那就是：「自然有秩序」，每一現象後面均有設計，而這種設計經由數學定律顯現而表達。誰制定這種設計？這一問題在中學層次，最好保留，暫不置答。

圖一



現在可以開始教數學的抽象力量。從純粹幾何談光的反射，知道從A點到QP線再到B點，最短路徑是使角1等於角2。現在假設QP為鐵路線，為A和B兩城居民服務。如需建一車站應設在何處，使A和B居民到站的總距離最少？答案是在P處。又假如沿QP設一所學校或電話局為A和B兩城服務，如要求也是最短距離或最少電話線，則學校或電話局亦應設在P。因之，一項幾何定理解答了許多不同的實際問題。初級幾何還有其他種種應用，例如：描述太陽系的作用、地理、繪圖透視、原子和分子的結構、建築、初級工程、測量、航行、甚至服裝設計。

如若將這種從文化着手的方式，擴展到中學第三年的數學（第三年通常是教三角）、更能演示數學多方面的價值。當光線從一種介質進入另一種介質，例如從空氣進入水中，將會改變方向，稱為折射作用。折射定律可用三角名詞簡單的表達出來。這一定律用於設計眼鏡、解說人眼功能和眼疾的診治，所以其重要性很容易證實。三角函數可以用於分析樂音的音調和音質，而這種分析又可應用於設計電話、收音機、唱機和電視。上述各種應用，當然沒有一樣需要集合論的知識。為了百分之百的學生，教師應當願意稍有犧牲。

從前的數學家經由真實問題得到啟發，並因而發覺數學的意義，這是

無需爭論的事實。數學應用於真實問題是教學必然的目的，同樣也不容爭論。不過，那些應用能使學生發生興趣和產生意義？則不無問題，只有靠教師的經驗作最佳選擇。所幸可供選擇的應用種類為數很多，真實世界的興趣遠比抽象數學的興趣，既大且廣，一定會發現吸引人的應用。至少，真實問題也比數學本身更容易引起好奇心。

採取任何立場，幾乎都可以找到權威為之辯護。雖說如此，但是過去最著名教育家的話，值得一讀。福婁拜（Friedrich Wilhelm Froebel 1782—1852），幼稚園的首創者，曾說：

數學的證明像是結結巴巴的報信者……另一方面，引力、力和重量的研究盯牢我的注意力，這些和實際事實的明顯關係，我看都是活生生的事物。

亞里斯多德確曾說過，思維理解沒有不先得自感覺。應用真實的、尤其是物理的問題，不僅能解答什麼是數學的價值，還能給數學賦予意義。負數不只是加法中正數的反數，還是溫度計上零下的度數。橢圓不只是一特別曲線，還是行星和彗星的軌道。函數不只是序對的集合，還顯示實變數的關係，例如：向上拋的球體，上升的時間和高度，一年不同時間中太陽和行星間的距離，在某一期間內各年的人口總數等等。捨棄概念所包含的意義，正像守住果樹的枯枝，而拋棄果實。

從真實情況發展數學，更可獲得另一價值。學生在數學上遭遇的最大困難之一，即解言辭問題。他們不知道如何將言辭的資訊轉變為數學形式。在傳統和新數學課程裡，通常缺乏生動的陳述，所以一定會產生這種困難。另一方面，數學不僅應用到真實世界，數學更從真實世界獲得消息，如歷史上所發生的，那麼如何應用不再是神秘過程。現在學生應用數學於真實問題所經驗到的困難，正如只懂法文的法國青年，想將思想轉譯為英文一樣。如若他生長在兩種語言並用的地方，如加拿大法語區，自然能以兩種語言表達自己。

將應用包含在課程之內還有另一種好處。我們已經注意到，大部份數學起源於想要解決真實問題的願望和需要。教師教這類問題時，可以包括

一些歷史背景，說明問題如何解決，甚至談些相關的人和事。如若不是將不相關聯的片段便湊在一起，而是很技巧的編織成功，則歷史和傳記不僅使課程生動，更可以教給學生同樣重要的一課：數學的產生是人對各種問題的回應。這是活生生觀念的主要部份，歷經多少世紀的發展仍然不斷生長。

為傳統教材辯護的人常回答說，他們的確在教應用。現在且讓我們先看幾項實例，例如掘溝人施工問題的困難選擇：某人掘一條溝需時兩日，另一人為三日，如兩人同掘，需時幾日？這類問題只能造成無意義的工作。還有水槽裝水問題，可是學生沒有游泳池可供裝水。至於混合問題，例如，「含乳脂百分之十的牛奶和含乳脂百分之五的牛奶，混合成一百夸脫含乳脂百分之五十的牛奶，問各需多少夸脫？」這類問題或許對摻假牛奶乳脂成份的農夫，最為有用。我們不要忘記提到有關時間、速率、距離的問題，例如，順流和逆流的行船問題。由於學生只想離開教室，任何地方都肯去，根本不會提出這類問題。有些代數教科書的作者，指向“真正的物理”問題。例如，歐姆定律說，電壓  $E$  等於電流  $I$  乘電阻  $R$ ，用符號表示為  $E = IR$ 。如  $I = 20$ ， $R = 30$ ，計算  $E$  為若干。假如沒有對學生讓解這一定律的概念和用處，電流不可能啟動任何人的智力馬達。

建議在中學數學起初的兩三年包含各種真正應用，可能被一些人看作過於急進，不過對已往稍加回顧，將可以改正這項觀念。在十七世紀，數學課程包含天文、音樂、測量、計量、透視畫、光學儀具設計、建築、以及防禦工事和戰具的設計。在其後幾世紀裡，有些課目由於失去重要性，不再列入數學課程表中。數學本身和整體知識的擴展，又迫使教育家刪去一些課目。但是將數學孤立於和時代有關聯的所有應用之外，即使包含應用必將減少數學涵蓋的範圍，也難以容忍。

除了教學法的要求外，我們還要認識數學並非獨立發展，和人的其他活動及興趣都有關聯。我們只是為了實際的理由，不得不將學問分為數學、科學、歷史以及其他各種學科，不過要知道這樣的劃分全是人為的。每一學科都是通往知識的一條路，為了方便或有益教學，各學科相互之間的

混合和重疊，均應樂於接受。

數學需和文化相關聯，我們這一時代能作最正確抽象思考、最淵深的哲學家，懷海德曾特別加以強調。在1912年所著「教育的目的」一文中，他說：

在科學訓練中，對一項觀念首先要做的事，是加以證明。且讓我暫將“證明”意義稍予擴充。我的意思是證明這項觀念的價值……我所力求的解答是根除各學科間不幸的隔離，以免扼殺現代課程表的活力。教育只有一項主題，那就是「生活」以及生活中一切的表現。可是，我們沒有注意這種單純的統一性，對兒童提供代數，教完就算了，提供幾何，教完就算了……我們的教學過程要預先計畫，表明有顯然重要性的諸項觀念，實在也具有連續性。

在1912年，另一篇文章「數學和通才教育」（見所著「科學與哲學交集」）中，他更進一步說：

初級數學……中任一部份的存在理由，如只是為後續課程學習的需要，那這些部份應加刪除……數學的要素是學習一套基本觀念。這些觀念的重要性，學生應能立即領會。每一命題和方法如不能通過這一考驗，不問對更進一步學習有多重要，都應無情地刪去……要簡化細節而強調重要的原理和應用。

1912年，懷海德所講的，和今天我們所教的，基本上是同樣的課程表。他的批評和積極建議仍然有用，事實上，且更有力量，因為現在中學所教的學生有更多不同的興趣和動機。

數學作為文理學科的科目，更需要作根本的改變。傳統取向提供的課目，如代數、幾何、中級代數、三角，僅對學生進一步學習數學本身有必要。新取向提供的，是那些有興趣、有啟發和有文化上意義的概念和技巧，只對增進文理學科目的有幫助。在最初兩三年不應為技巧本身而教技巧。換一句話說，教材要目的導向，不要科目導向。

對將來使用數學的專業人員，又怎麼辦？我們明白承認，學生中有百分數很少的人，確實想成為未來的數學家、物理學家、化學家、工程師、

社會科學家、技師、統計員、保險統計員和其他專業人員，工作上要用到數學。當然，這些學生也應當知道數學的文化意義。況且這些學生既已傾向於某一專門職業，如能曉得這一專業和數學的關聯，自會對數學發生興趣。

如果為探求文化目的，減少將來要用數學的學生技巧方面的準備，應該怎麼辦？在入學第十一年底，學生如願為專業用處而繼續修習數學，應在第十二年提供選修的專技課程。由於學生知道心目中的專業需要數學，因而有更好的動機，極可能進步很快。一年之內就獲得很多技巧的背景知識，遠比從現在的傳統課程表所得更多。事實上，這些學生現在和沒有興趣且準備很差的學生混在一起上課，不會比在九年級和十年級學得更多，而且第十一年通常又是令人煩厭為補救程度很差學生而設的複習課程。

除內容外，還有許多教學法上的問題，如，證明的處理，帶領學生發現結果，實驗器材，包括現在電算機的使用，以及考試測驗。不過，這類教學上的問題現在暫且不談，專從內容的討論，已足顯示中學教育並不良好。

數學教育結果不佳已萬眾所共知，所以更需關切的問題是：中學數學課程表的基本內容為何仍然不變？答案是：許多世代以來，大學及大多數四年制學院的數學系，對未來的中學數學教師教的是相同科目。事實上，就整體來看，教給未來教師和教給所有專修數學學生的科目一樣。教授將自己所重視的價值和興趣，投射到未來中學教師的課程上，學生則不在考慮之列。為研討中學教育種種問題，配合設立能使未來教師解決這類問題的課程，每一學院或大學的數學系，至少需要一位專任教授在這方面盡力。整個大學部學生教育的大敵（研究的壓力）使這種關注變成不可能。雖然教育院系的教授確在教未來教師如何教學，但不能抗拒各學系對內容的支配，所以絲毫不能影響課程表。

結果由於中學教師知識有限，又受到數學教授和行政主管對目標和價值的約束，教師不論發覺教材如何貧乏，也只有照教不誤。他們沒有專門見解，也沒有力量來改變課程表。

資深教師通常不歡迎沒變課程表，這也不必驚奇。由於一直被灌輸傳統的、孤立的、引不起動機的數學，遇到要教更有意義、更有目的教材的挑戰，自然會因畏懼而退縮。例如，遇到要教有關加速度的應用問題，他會舉手爭論，說這一概念對學生太難，或者需先有物理知識。可是，學生和教師坐進汽車，使車開動或停止，一定要加速或減速。行駛中的汽車，很少以固定速率行動，需要不斷的加速或減速，所以加速度的意義當然可以從直覺上知道。學生還很年輕，易於接受新觀念，不會覺得這一概念難懂。如果教師不會為專注數學所自限，也不會有困難。事實上，學加速度甚至有關生命，太快減速會使許多乘客衝出汽車擋風玻璃外。要求教師教應用，並不會給他們帶來真正的困難。實際上，中學數學教應用，需要的科學知識很少，每位教師都能具備。未來的數學教師自當在大學部學生時期修習一些科學課程。

一項豐富而有活力，又能吸引人的中學課程表可以編訂成功。應由經驗豐富、知識淵博、曾受廣含教育的教授領導改革。專家只能作為顧問，不能任其主持。同樣重要的，要有深具文化修養的非數學家參與其事。他們認為對將來公民有價值的是什麼，遠比專家的判斷更重要。

中學數學包含代數的技巧，幾何定理的證明，以及抽象概念和符號的迷宮，不斷陷學生於困惑和厭惡的境況。現在許多人認為學生沒有數學的智力，實際上，是沒有給他們以有益的、啟發的、令人鼓舞的數學教育。雖然，真誠的教師，不知不覺將他們自己所學的一技巧和證明一傳授給學生，不過有時覺得向學生提出和重複意義不明的公式有點欺騙，對自己的職責有時感到值得讚揚，但又時常覺得迷惑。

當前中學課程表是數學生命的一項威脅。如果學校不能提供一項更有收獲、更有意義的課程表，那只有很少的學生會修習數學。學院入學要求條件，是一般數學還能在中學生存的主要因素。中學數學將來恐難保留，不再作為入學條件，幾乎可以肯定。如若中學數學難使學生覺得更有吸引力和有意義，數學將不再是普通教育整體的一部份，其靈魂將伴隨和真實世界不相干的氣氛一齊升到天上，悄然逝去。





## 第九章 洞口初見光亮 ——小學教育

我曾上過學校，並能背誦乘法表到 $6 \times 7 = 35$ 。  
就是永遠活下去，我不認為還能多學一些，無論如何，我對數學沒有興趣。

*Mark Twain (Huckleberry Finn)*

從小學到研究所，所有各級數學教育以小學最難教。主要理由是我們對低年級兒童如何學習，知道得不夠。就是對高年級兒童如何學習，也所知無多，不過他們不再過份依賴教師。

由於缺乏正確的教學知識，無怪美國從最初創設小學直到1950年，算術的教法（專練技巧）完全是沒有知識作根據而決定的。當然，在十九世紀及以前，沒有博學的教授來訓練小學教師，事實上，大都在師範學校（稱不上學院層次的學校）接受訓練。不過，即使訓練小學教師改在文理學院和教育學院之後，也沒有什麼改進。文理學科教授並未真正關心未來小學教師的數學教學，教育學院的教授對如何教學，也不比師範學校的前輩所知更多。

本世紀初，教育心理學引入教育學院，成為正式學科，要求未來教師修習這一課程。不過，教授並不能提供什麼，他們支持、甚至讚揚機械式強記的學習方法。這派思想的領袖，桑載克教授，如前文所述（第二章），主張學生應對任何指定問題，能自動回應。不斷重複刺激——回應，就發展成為技巧。實際上，桑載克在「算術心理學（1924）」中，認為：

推理並不是一種完全不同的力量，用來反對習慣，而是將許多習慣組織、協調在一起，對事實加以整體思考。算術的每一樣都要教得幾乎成為習慣，並和已經學到的習慣連繫起來，還要和將來學到的其他習慣，形成組織。用這樣有組織、分層次的習慣來解決新問題，就是推理。

這項方法論的價值，很容易試驗。只要向一位曾受教育的成年人，問他以 $\frac{2}{3}$ 除 $\frac{3}{4}$ ，得數多少？最令人難解的，是教師一方面照着桑載克心理學，不斷要求機械強記式的學習，而同時又提倡心智訓練的價值以及推理訓練可以轉移到其他領域。

到1950年代，一個新時代開始，數學教授決定中小學課程表要改革。算術變成抽象邏輯發展的科目。爲了這項新教學方式，教師要經過訓練或重新再訓練。至於新課程的內容則由數學系提供。

由於引進集合論作爲教小學生的一項課目，所以未來教師必需能教集合論。可是，曾經教過、以及現在大體上仍然在教的內容，實在令人失笑。茲以所重視的空集合（用符號 $\phi$ 表示）爲例。如果此處沒有蘋果，用 $\phi$ 表示蘋果的空集合。教師用的教科書，有些要求學生舉出幾種不同的空集合。另一些要求學生證明空集合是唯一的。更進一步，要求認清一個事物和事物的集合間有邏輯上嚴格的區別。一套書或書的集合不是一本書，依據同樣的道理，空集合和包含空集合的集合間有區別，後者以 $\{\phi\}$ 表示。由於 $\{\phi\}$ 包含空集合，所以並不空。一個集合包含在另一集合裡，例如，六本書的集合包含在九本書的集合裡，以符號 $\subset$ 表示。那麼問是否 $\phi \subset \{\phi\}$ ？，不是很重要嗎？

更廣泛的講，這些新課程強調數學的演繹結構，即從公理由演繹推理而作證明。認爲沒有這樣的證明，就不能肯定任何事。不過，在小學課程中，演繹證明幾乎沒有用。歸納證明、物理證明、計量、圖片是學習及了解的根據。可是，未來的小學教師，坐在名教授的腳跟旁，無法拒絕或否定教授所教的知識。到了這些學生成爲教師時，如果他用圖片證明，引導學生接受某一方法或技巧，而未用演繹證明，不免有類似叛徒之感。

如果上述教材，是數學系提供給未來小學教師最好的教材，那麼不如不提供任何普通數學課程還好一點。有人為學院的這類課程辯護，說是教師應為學生今後二十年至三十年要用到的數學作準備。教授也主張了解基本原理將減少初級和高級知識間的差距。至於這些未來的用處和高級知識，究竟與兒童教育有什麼關聯？都完全沒有涉及。

通常教給未來小學教師課程的內容，已經非常不良，更糟的，這類課程的教學全由研究生或新進講師擔任。認為這類科目太簡單，不需精通數學的資深教授來教。實際的理由是：教授不願意教不是為造就專門數學家而開的課程。

心理學家忙着為新的取向作辯護。布侖納 (Jerome Bruner) 在「學習的過程」一文中說：從假設開始，我們能用某些出於心智的真誠方式，有效的將每一學科教給任何發展階段的兒童。」這段話不斷為人引證和利用——尤其是擁護新數學的人——為抽象講授辯解。這段話的可取特點是含混不清。請問，將康德 (Immanuel Kant) 的「純粹理性批判」教給六歲小孩，有什麼出於心智的真誠方法？

公平的說，兒童如何學習，大多數家長所知和心理學家所說，似乎一樣。所有的人，特別是兒童，大都根據具體經驗發覺到抽象，這是很容易看出的。兒童的學習興趣各異，學習具體教材的快慢也不同，甚至領會簡單抽象的年紀也有差別，這是顯而易見的，不論這種差異由於遺傳或環境影響。

不論有無心理學家的幫助，我們很容易知道，任一學科最難的是開頭那一部份，由於全部陌生。但這也是最重要的部份，因為此時獲得的思想範型和態度，將會固着在幼小心靈裡，難以改變。學習算術的障礙，特別不易克服。首先是一開始就立刻碰到抽象。對大多數五歲小孩，數字 5 是無意義的符號。像 7 大於 5 嗎？這類問題更困難，好比要小孩算出到天狼星的距離一樣。此外，年級越高，抽象越遠離經驗。負數的領悟，就遠更困難。在負數觀念引進數學領域之後，最好的數學家也因此困惑了一千年以上。

學習算術的另一項障礙，是由於表達數量巧妙但不自然的方式所造成。我們的數系用到位置計數法，在151中，兩個“1”的意義完全不同。事實上，在許多不同文明中，都各自發展成功某些不同的算術系統，但只有一種文明，巴比倫文明，想出這種設計，所以人為造作的位置計數法，容易使人迷惑，極為明顯。歐洲人從巴比倫學到這項觀念並加改進，從六十進位改為十進位。雖然位置計數法使算術演算簡便，但却使理解更為困難。至於長除法的解說以及通常求平方根的方法，甚至更難領會。小學教師為了避免只教不斷不用心思的呆板練習，一定要將他的精力和可利用的時間，在既教技巧也傳授理解間作適當分配。這兩項任務都不輕鬆。

精確的語言使用，也是另一項困難。在通常談話裡，常容許一些語意上的含糊，因為正確的意義可從上下文得到解決。例如，信中稱呼“親愛的約翰和瑪麗”，當然意謂約翰和瑪麗兩人都是他親愛的。但就文法而論“親愛的”只形容約翰，至少可以作這樣解說。同樣情形，銀行廣告說，樂於擴大小車貸款，如未特別說明，可作只對小型汽車貸款，或者對任何汽車貸給小額款項。這種含糊語意，數學不能容許。例如， $10 - 7 + 3$  和  $10 - (7 + 3)$  並不一樣。如若真是後面一項意思，則括弧必不可少。同理， $3 \times 4 + 5$  的真正意思是  $(3 \times 4) + 5$  而不是  $3 \times (4 + 5)$ 。括弧實際大有幫助，可是，現在教小學生說：強演算乘和除應先於弱演算加和減。數學語言一定要精確，即使必需用符號表示和顯得不自然。

上述各種困難不容規避。如和中學階段情況相比，小學數學內容很少有所選擇。每一成人都應能做算術和應用普通幾何公式計算面積、周長和體積。在今日社會裡，一些統計和機率的知識，也幾乎人人必需具備。至於後述兩項課目，究應在小學施教，還是留待中學階段才教，却不無爭論。

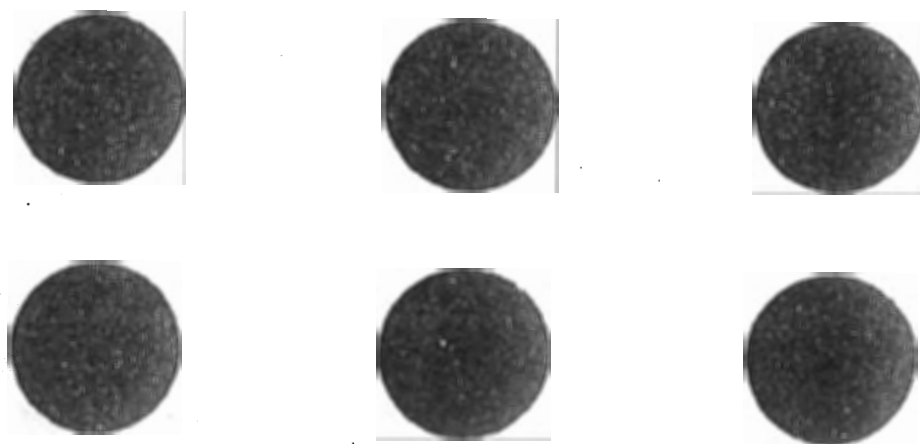
從課程內容以及關於兒童如何學習，我們所知有限的原理來看，應教給未來小學教師一些什麼？真正文理學科課程，如前文所述（第六章），實在對教育所有的人，當然也包括小學數學教師，更有助益。對後者要教以數學在人間事務中的一些回顧和展望。他們得到的知識，有些能在將來教學時加以運用。未來小學教師重大的需要是重習算術。他們知道的算術

，也就是從前在小學裡所學的。通常這些教師和其他成人一樣，對算術知識並無確實把握。其中許多人，甚至現在要教算術的時候，也很畏懼。這種失敗嚴重妨碍有效的教學。重習算術當然大有助益。尤其是作為學院學生的未來教師，其學習動機自較在小學時遠為強烈。除了為重習算術，這一課程也要能加深對算術及幾何的澈底認識，以滿足一項重要條件，即教師必需比所要教的知道更多。因之，像非十進位的位置計數法一定要教給未來的教師，雖然這絕不能教給小學生。通常求平方根的方法，雖然兒童不能完全明白，但是教師要弄清楚。專用名詞，如“反”、“交換”、“結合”以及其他等等，應教給未來教師，雖然絕不應強使兒童學習。由於初步統計和機率，已列入小學課程表內，未來教師當然對這種課目要知道得比將來應教的更多些。

無疑的，數學教授會反對這種課程，認為不合學院水準，拒絕用他們寶貴的時間和精力去教如此簡單的教材。可是，他們對現時所教這種課程弄出來的笑話以及對小學教師真正的需要毫無所知，並不感到苦惱。似乎，使學生迷失於空集合的無窮問題，才合於學院水準。

縱使現在為小學教師所作的準備不佳，近幾年來，小學教育，特別是低年級，仍有些進步，至於其他教育層次則尚無所見。其中理由之一，可能是對新數學的反作用。當然，新數學對小學和中學階段確是災難，尤其小學階段災難程度更為顯著。到了小學生竟然連9加8都不能計算的時候，終於每個人都感到震驚了。至於中學生不能解答 $x+3=7$ ，也應使大家同樣震驚。不過，日常生活中不需要解這一類問題，又和大多數成人無關，所以中學生連簡單代數都不能領會這項事實，未曾受到同樣嚴厲的攻擊。

無論如何，關心小學的教師，似乎終於從明顯的事實，獲得教訓。抽象，不問如何簡單，只能從許多具體經驗得知其意義。因之，近年來的教科書有了人物、動物、房屋、糖果以及兒童熟知種種事物的圖畫，教師花很多時間只就這些圖畫來解說有關聯的整數和整數演算。例如， $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$ ，不再依據交換定律，或者純機械的呆板練習去教。



圖一

讓學生看按矩形排列的圓片（圖1）。他們就看出有三個圓板的兩橫列和有兩個圓板的三直行總數都是六。立即知道兩數相乘與次序無關，因而學會了乘法的交換性質。將分數看作餅分成的小塊，一眼就看出整個餅的 $\frac{2}{6}$ 和整個餅的 $\frac{1}{3}$ 相同，學生很容易了解一項原理，即分子和分母乘以相同的數，分數本身之值不變。

依據真實情況而發展的算術，還不只教會演算技巧。假使兒童學會四則演算，但不常和實際問題關聯在一起，則遇到實例時，常不知道用什麼方法演算。例如要他將 $1\frac{1}{2}$ 餅等分給三個兒童，他會想到用除法嗎？會想到以 $1\frac{1}{2}$ 除3，還是以3除 $1\frac{1}{2}$ ？

在算術教學進入高年級，有大數目、複雜分數、小數和百分數的演算。對於這些課目，如若教師在學院所受教育不良，就會問到用什麼真實現象和情況來表達算術的意義和目的？前曾建議用在中學最初兩年的一些題目，同樣可以採用，不過所提問題要更簡單。例如，在告訴學生聲音在空氣中的速率之後，就可問他們，在一定秒數內，聲音能傳送多遠？或者聲音訊號，送到一定距離，需時好久？這些問題本身並不能使人有所激發，但很容易引向可以產生興趣的方向。聲音經大地傳送每秒約5500呎，經空

氣每秒只有1100呎，所以遠距離的聲音經由大地傳至聽到的人較快。這就是印第安人將耳朵靠在地表可以較快聽到有騎馬人來到的道理\*。可以再問學生，如相距一哩，則兩者時間之差有多少？聲音速率另一項應用，是從聲音到達一山頭和回聲傳回之間的所需時間，計算此一山的距離。同一原理，也可用來測定海洋及海港的深度，以及一艘潛艇離另一艘的距離。（\*編者按：如果相距1哩則聲音由空氣傳來約需5秒，由地下傳來約需1秒，兩者只差4秒，何況又不是隨時趴在地上，所以「購」得的時間，對應變而言大概沒有什麼意思。聲音在空氣中傳播容易消失，傳得不遠；在地下傳得較遠，而能使聽者及早應變。這才是印地安人將耳朵貼在地上的原因。）

從光的速率，每秒186000哩，也可以引向一些新事實。如已知地球和太陽間距離，來自太陽的光到達地球，需時多久？經由計算得知日光到達地球經時八分鐘。曉得這項事實後，就可問學生，是否我們看到的太陽正在現在的地方？當然不是。我們看見的是八分鐘前，太陽所在的地方。在這段時間裡，太陽或許已經爆炸掉。

速率、時間、距離，也能應用到戶外運動問題上。例如，設直飛球——打出順著幾乎直線行進的球——的速率為每秒100呎，若被距打擊手350呎的外野手接到擲還。有多少時間讓外野手跑到位置接住球？又如三壘上的人能每秒跑40呎，要跑90呎才到達本壘。投手距本壘65呎，能以每秒20呎速率將球擲給捕手，是否跑壘者能在球前到達本壘？（譯者按：這些速度有問題。每秒跑40呎的人穩破世界各項短跑記錄。投手的球速若比跑者的速度慢，這樣的棒球比賽就一點意思也沒有了。）再如跑壘者能四分鐘跑完一哩，他每秒能跑多少呎？

質量和重量的區別，小學課程裡也能加以利用。在日常生活裡，質量和重量常混淆不清，但並無損害。可是，在向太空探險的今天，這項區別就很重要，教起來並不難。大略而論，質量是物體所含物質的量，重量是地球或其他物體對質量產生的拉力。所以太空人在月球上其質量和在地球上的一樣，但其重量就減少很多，約為地球上的六分之一。



是否要將兒童帶到月球去證驗質量與重量的區別？用太空人在月球上散步的影片也就可以了。此外，還能從兒童的一般經驗上得到幫助。例如：物體放進水裡會浮起來，浮起的力等於物體排去水的重量。這一事實稱為亞基米德原理。因之，游泳的人藉所排去水的重量而上浮，正好近於他的體重，所以在水中他處於無重狀態。又如將一根彈簧的上端固定，使其下端正好觸及並掛在游泳者身上，他的質量並不能拉伸彈簧。

如若物體在空氣中的重量大於放進水中所排去的水重，則將下沉。水的重量每立方呎為62.5磅。已知一塊鉛，或其他物質，在空氣中的重量及其體積，就很容易寫成算術問題，用來解答這一物體在水中是浮還是沉。

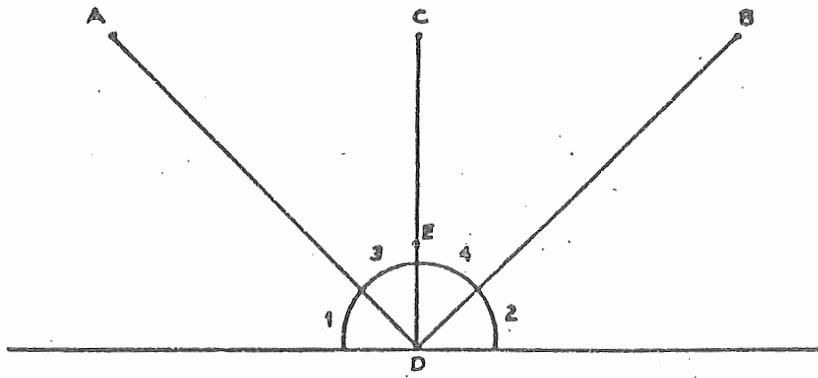
亞基米德原理也可應用在空氣中的物體，說明物體不下降而上升。充滿氦的氣球，其重量比所排去的空氣的重量為輕，藉被排去空氣體積的重量而上升，因為拉着氣球向下的重量較小，使得氣球升起。這也很容易提出簡單的算術問題，來談氣球的運動。

在小學講初步的統計和機率，有很好的個案例證。美國公民幾乎每天在電視和報紙上看到統計。正像拉普拉斯約在二百年前曾經指出，人生大多數重要決定都以機率為根據。甚至微不足道的決定，如過馬路，也同樣以機率為根據。不過，統計的解說並不簡單，例如機率0.75的意義，要看是談賽馬還是講醫療而不同。當然，政治領導人物，或其他有所企圖的人，常利用統計和機率來誤導大眾。所以這些科目的知識和應用，在所有公民的日常生活中都很重要。

商業問題和生活關聯很大。每一公民當然應了解複利正如瞭解打折扣一樣。兒童對這類課目可能不感興趣，不過可藉挑戰性的問題來幫助。例如店主將一項貨品售價降低百分之十，後來再升高百分之十，是否恢復到原來售價？一項貨品，先打八折，再就已降低的售價打九折，或者同一貨品先打九折，再就已降低的售價打八折，那一種方式更便宜？

初級幾何現在已引進小學，這是一項有用知識。照流行的辦法似乎為創新而創新，要求兒童學習很多名詞——銳角、直角、鈍角、平角以及其他幾十個名詞——並從圖形知道其意義，但沒有從兒童的眼光來說明這些

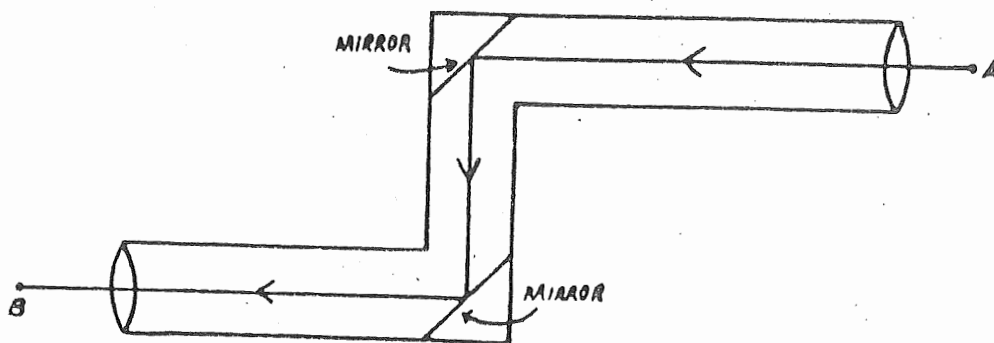
知識的目的。幸好，這些知識可以有幾十種有興趣而又簡單的應用，能夠幫助兒童看出“角”除了作為三角形的一部份以外，還有其他用處。最普通的一項應用題是鏡子。鏡子按簡單原理反射光，稱為反射定律。離開A的光線（圖二），在D處碰到鏡面，就反射光使角1 = 角2。如若引垂直



圖二

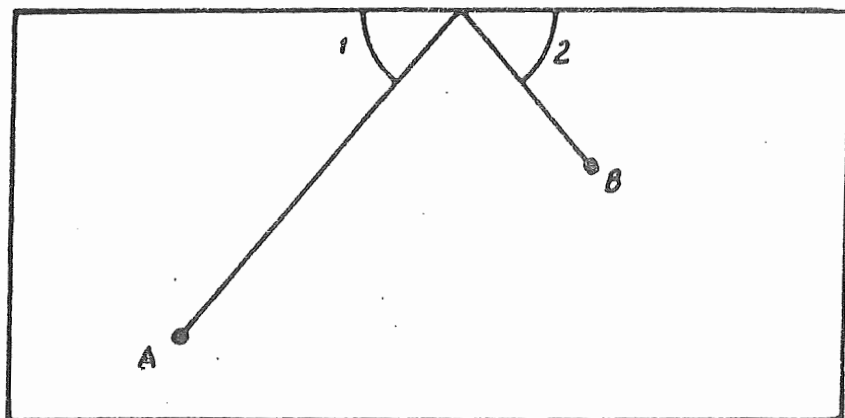
線CD到鏡，則角3 = 角4。角3稱為入射角，角4稱為反射角。反射定律是說入射角等於反射角。許多光線（嚴格的講，無窮的光線）離開A，在不同點碰到鏡面，不過只有一條光線到達B——即使角1 = 角2的一條。因而在B處的人從鏡子裡看到A。事實上，即使CE是A與B間的一面牆，在B處的人仍然在鏡子裡看到A。

這項定律在教室裡很容易演示，將房間變暗，平放一面小鏡子在講枱上，用一鉛筆形電筒，就能表演射入和反射的光線。由於每一兒童都熟悉鏡子，他們會覺得這一定律很有趣。為進一步加深兒童印象，知道角的重要性，可以描述甚至演示反射定律用於潛望鏡。從A（圖三）發出的光線



圖三

，經兩次反射到達 B。



圖四

反射定律也能應用到撞球遊戲。在 A 處（圖 4）的球，如要由桌邊反彈打到 B 處的球，一定得對準方向，使角 1 = 角 2。

初級幾何可以應用到天文學，最好用商店中買得到的太陽系模型作為補助器材。在這種模型裡，太陽、行星以及衛星，都準確照着在天空運行的軌道，連相對的速率也很正確。這種模型遠比言詞的敘述、黑板上畫圖、書裡的圖片更有價值。很多數學題目——行星的速度、全年中白天的長短不同、以及日月蝕——用這種模型很容易就可以說清楚。有人會反對，認為這些屬於天文學科。可是，這些都是知識，根本上和數學有關聯。

初級幾何還能用在另一領域，即地理。經度和緯度是在地球中心形成的角。學生可以計算循子午線行經緯度 5 度的距離，或者循赤道或緯度圓行經經度 5 度的距離。在有些例題裡，要加入某些資料，如緯度圓的半徑等。

有些應用雖然世俗但頗有用處。例如，要求學生想一想相同周長的矩形面積。若周長為 100 呎，則矩形尺度可能為  $1 \times 49$ ， $2 \times 48$ ， $4 \times 46$ ， $10 \times 40$  等。從算術和矩形面積公式，學生很快就發覺最大面積為正方形，即尺度為  $25 \times 25$ 。這項結果很有用處。如若農夫想用 100 呎籬笆保護種植的土地，以選擇正方形所包最多。如若五十層辦公大廈的成本，主要由圍牆所定，出租收入主要由地坪的平方呎所定，則正方形將使每層有較多收益。當然，其他因素，像土地形狀的限制，不能採正方形，但越接近正

方形，可以得到的地坪面積越多。到了中學，還會對正方形提供最大面積有所證明。

有些幾何應用並不切實用，但能令人驚奇。告訴學生圓的周長是  $2\pi$  乘半徑（暫不必證明）後，就可用這一公式計算 5 呎半徑圓形花圃的周長為  $2\pi \cdot 5$ ，即  $10\pi$  呎。假如在花圃周圍築一人行道寬 1 呎，再建籬笆圍繞人行道和花圃。圓形籬笆的半徑為 6 呎，其周長為  $2\pi \cdot 6$ ，即  $12\pi$  呎。籬笆長於花圃本身的周長為  $2\pi$  呎。這一結果並不足奇。假使現在圍繞地球赤道築一條公路，在每點均較地球表面高一呎。這條公路比地球周長長多少？學生只從直覺去猜，通常會超出目標很多。公路形成圓的半徑是地球半徑  $r$  加 1，即  $(r+1)$ ，所以其周長為  $C=2\pi(r+1)=2\pi r+2\pi$ 。因之公路只比地球周長長  $2\pi$  呎，正和籬笆長於花圃周長一樣。

就數學的科學應用而言，小學教師比中學教師問題較少。現在小學有一些科學課程，而所有科目都由一位教師負責。小學男女教師既然都知道相關的科學，為什麼在教數學時不能教和數學關聯的科學？將各科目硬性分隔，要求十點鐘教算術，十一點鐘教地理，完全是人爲的，且違反教育的目標：一切知識應該形成一整體。

上述就實際情況所舉例證——提供小學數學施教範圍以及動機和應用——將能說服兒童，如教學方法恰當，這一科目可以吸引人。只要兒童能從物理或感覺的辭項去連想，就不覺得有拘束。符號和文字只有利用感官的知覺作用才能取得意義。所幸，小學教育階段的教師和教科書，正在趨向一項原則：即從直覺而不是從邏輯去求了解。並且運用能夠幫助直覺的各種方法——如兒童在校外的經驗，教室內各種活動，圖片、計量和幾何圖解——以解答爲什麼以這種方式去教。從算術方法看出確能產生物理上的真，因而獲得信心，這並不是數學意義上所說的證明，但這種信心應當而且現在正成爲兒童接受算術方法的根據。

實驗器材現已廣爲利用，作爲教學法的輔助。教師不再需要自己帶蘋果到學校。在最初二三年的班級裡，教師現在有多種器材可用，如桿棒、紙卡、圓板、天平、比例尺、分數棒、幾何板、時鐘、捲尺、各種測計用

尺、幾何模型、教機率用的旋轉器、以及各種大小、顏色、形狀的木塊，用來代表個位、十位數等。

以遊戲和猜謎激發小學最低年級兒童的學習動機，現在也已採用，這是可喜的現象。對很小的兒童，柏拉圖(Plato) 在兩千年以前，就在「共和國」一書裡，提出忠告：「那麼，我的朋友，不要用強迫手段教兒童學習，要用遊戲方式。」許多商業機構現在製造遊戲器材，學校方面也願意購置。

較高年級的實驗器材，現正迫切需要。其中之一，小型掌中計算機，正引人注意，無疑的有助於學習算術，其確實價值後面將再談到。實驗器材最近幾年才被引用，但大教育家多少世紀以前，就有這樣主張。蒙田(Montaigne)和盧梭(Rousseau)勸告我們教小孩要借助於真實事物——讓小孩邊做邊學。

從物理問題、真實現象和實驗器材建立基礎的小學數學，目的當然是：傳授對於技能的了解，希望了解能有助於記憶技能和決定如何運用。可是，充份了解今天的算術，甚至用最好的教學法，也不易達到，因為算術系統太複雜——至少對兒童而言。不過，這項技能應在一生的早期就學會。解決這種困難不是放棄傳授了解，而是強調取得技能。雖然兒童的了解可能不完全，甚至會忘記演算的道理，不過從傳授中也會學到不少。至少，曾經接受過這種傳授有心理上的價值，可以使心情平靜。一點都不了解，心中始終感到迷惑，在演算時就會發生錯失。這種心境，有點像成人被要求捐款慈善事業一樣。他先要知道為什麼要捐給這一慈善事業，而不是其他慈善事業。當他自己認為滿意後，自會甘心捐贈而無怨恨。在未來多年內，也會無疑問的繼續捐贈。他記憶的不是為什麼選取這一慈善事業，而只是自認滿意這是件有價值的事。對技能而言，也正是這樣。先了解為什麼，再學會如何做，將來做的時候自然不會遲疑。事實上，不需要也不必重想為什麼。正如懷海德所指出：

一項實在大錯的爛調，在所有習字簿上，在名人演講中，不斷重複流傳，那就是：『我們應培養對正在做的事加以思考的習慣』。事實上

，正好相反。文明的進展由於重要運作的數目擴增，這些運作我們可以無需思考而完成。思想的運用，很像戰役中騎兵的突襲——為數極為有限，馬匹必需精壯，而且一定只用在決定性的時刻。

有些教授仍然相信，概念能教人了解，所以應居優先。更假定不需很多練習，就能成功的獲得技巧。今天又更進一步，主張算術技巧的教學完全不必要，學生和成人會用小型掌中計算機。有了新的儀具，常會有這種情形，誇大其價值，超出一切理由之外。無數沒用的文章和談話，形成一種新的時尚和藉口。

以掌中計算機代替算術技巧的期望，像符咒一樣召來很多可笑的景象。顯然有很多人帶了計算機去逛店購物，決定給侍者和計程車司機多少小費，用多少輔幣付地下火車車費等。假使只是想訓練大家能操作雜貨店的現代收銀機，或許靠計算機可以辦到。

尤其奇怪的，許多人認為課程表應為學生學習學院的數學作準備，也就是他們主張放棄教技巧而以計算機來代替。不過，進入學院的學生，一定要先經過中學，他們要做像 $(1/a)+(1/b)$ ， $a^5 \cdot a^3$ ， $(a+b)^2$ 等等計算。學生可以學到的最重要代數原理，是以字母代數字。如若知道數字的演算，就很容易懂得並做出對應於字母的演算。 $(1/a)+(1/b)$ 加法演算正和 $(1/2)+(1/3)$ 一樣，所以必先學習算術技能才能學會代數。

此外，就是在按鈕做算術演算之後，也要查看一下答案是否合理，因為很可能按錯了鈕。不過，估測一個答案的合理與否，需要知道很多算術技能才能做到。

掌中計算機可以比作打字機，人可以用打字機而放棄手寫，不過打字機不能告訴我們該說些什麼以及如何說。同樣的，計算機也不能告訴我們應做什麼演算以及答案是否合理，其價值是有限的。對了解算術以及如何運用的人，計算機可供快速做一連串的计算，或者大數目的計算。對於查核用鉛筆和紙做出的計算，也很有幫助，所以可以用作教學輔助器材。這確是新玩意兒，能讓小孩用手指去按，以引起新奇感，但並不能代替算術技能的教學。

訓練未來的小學教師，當然包括物理現象的了解，以使用以啟發學習動機與算術和幾何的應用途徑，還要包含運用實驗器材作為輔助方法。學院為未來教師開設的課程，也應鼓勵發展更多教學輔助的方法，此處只能略加提及。

專門術語有需改進，所幸有些已經改正。早期教學生如何做 $24-19$ 的減法時，就說從2裡「借」1，和4放在一起為14，學生隨即繼續做下去。這一名詞「借」不很好。或許有人想用「討」或「偷」。談到「借」正像「哈姆雷特」悲劇裡，普婁尼阿斯(Polonius)對兒子賴爾地斯(Laertes)所說，「向人借錢這是挫鈍儉德的鋒芒」。此外，如說借就應有還，可是並沒有還。所以較好的名詞可用「換」或「重組」。從兩個十裡取出一個，轉換為十個一，再將十個一和四相加。一個十換成十個一，正像一塊錢換成十個一角錢一樣。

技巧的錯誤應用是一項考驗，需要批判性的思考。一整數為另一整數所除，是重複的減法，教學生時可以這樣講。不過，以7除28可能像下面所述去做：先試以1作為試商，再減，即得

$$\begin{array}{r} 1 \\ 7 \overline{)28} \\ \underline{7} \\ 21 \end{array}$$

現在可以3作為次一試商，事實上，7就是21均分三次。這一錯誤演算經過，會寫成

$$\begin{array}{r} 13 \\ 7 \overline{)28} \end{array}$$

將13假定作為答案。其中毛病很平常，成人很容易看出來，但就兒童而言並非如此。當然，巧妙的錯誤論證和演算很多，可以用來幫助了解。

在小學課程表上某一階段，要教學生充份警覺到數的抽象性。一項簡單情況可以用來說明這點。有人到鞋店買三雙鞋，每雙價20元。店員認為3雙鞋，每雙20元，應付60元，就請顧客給他60元。但是，顧客並不這樣想，反說3雙鞋，每雙20元，並不是60元，而是60雙鞋，要店員給他60雙鞋。顧客有理嗎？顧客正和店員一樣有理。如若鞋的雙數乘錢數能得到錢

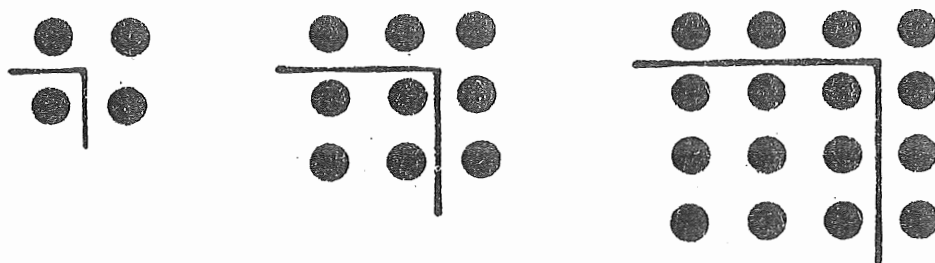
數，為什麼相同乘積不能得到鞋的雙數？（物理學家會用因次論證來說明，作為補救辦法。）當然，正確答案是我們並非將錢數乘鞋的雙數，只是從實際情況裡抽出3和20兩數，相乘得到60，然後再解釋結果以適合實際情況。在這一例子裡，店員就實際情況所作的解釋，至少在現行經濟制度下，是正確的。

現在大家都說，要教學生如何去發現。事實上，無疑的這很難實行，因此也很難做得成功。為每一課目必需準備一連串的引導性問題，可是通常並沒有這樣做，然後再將學生的答案重行安排，引向有用的建議。這種方法很費時間，許多教師抱怨說，如若要教發現，就不能教完全部課程。不過，即使課程講全了，只引起煩厭甚至失敗，那也沒有什麼成就。此處無法將小學要教的許多課目，改用教發現的教法，一一加以解說，只能以一個簡單數字例題，作為這一觀念的說明。先將下列事實介紹給學生：

$$1 = 1^2, 1 + 3 = 2^2, 1 + 3 + 5 = 3^2$$

然後要求學生加以一般化。不需要他們將一般化結果以符號形式寫出；但是他們實際會說出：最先  $n$  個奇數之和是  $n$  的平方。

一項有趣的圖形，可以用來充實這一結論。事實上，畢達哥拉斯在紀元前六世紀，首先採用這種圖形（圖五）。從這些圖形可以看出，如何將



圖五

奇數的圓點加進去，就是那些在實線之上和右邊的圓點，產生下一個平方數。暫時接受這一結論，進一步要求學生不要實際做加法演算，說出的和

$$1 + 3 + 5 + \dots + 97 + 99$$

是什麼。只談整數的簡單性質，就有很多實例可以供作發現的合理要求。



前面曾經提過的一項應用問題，即求一定周長的矩形最大面積，也可作為要求發現事實的例題，即相同周長的所有矩形，以正方形的面積最大。

雖然從1970年代開始，算術的教育有些進步，不過惡龍仍然遨遊大地，想要更求進步，必先屠龍。學院教授對於教未來小學教師的課程，並不認為有什麼重要。但是這些課程和教授教的任何課程同等重要。這些小學教師將來怎麼做，具有決定性的影響，從進入學校的一刻，兒童就開始學習數學。他們的成敗將影響到對這一科目的態度，對自己本身的信心，甚至對所有學問的態度。不良的數學教育像一桶好蘋果裡的一只爛蘋果，經由污染將其餘的也都弄壞。在小學過程裡，太多的人自認沒有數學心智。實際上，他們是教師的犧牲品，而教師又是學院教授的犧牲品。「沒有數學心智」的人，是由於他們沒有受到適當的數學教學，無意義的數學不能穿透任何心智。遭受算術挫折的人，由於數學的累積性，會對一切數學永懷自卑情結。甚至不需以算術為先修課程的科目，像幾何的廣大領域，只因為也是數學的一部份，就使已被算術燒傷的學生，拒絕讓新課目重燃他們的心智。

數學家確實喜歡助長一種印象，即真有像數學心智那樣的東西，且認為必然優越。雖然這種心智的存在很不可能，不過從機率來看，愛因斯坦創造的才智確需不同尋常的能力。但是可以確定的是：一個人要了解數學，並不需要有數學心智。

學院提供給未來小學教師的課程常屬浪費時間。通常所教的課目和現在所謂文理學科課程一樣——實數系的邏輯發展、集合論、超限數、布氏代數、真值表、諸如群、環、域、有限幾何等抽象數學結構、以及特別強調的公理論和證明。為大一文理學科課程所著的同一教科書，在廣告上和事實上都說適合於教給未來的小學教師。即使在新數學的全盛期，這些課目也不適當。小學教師並不需要知道這類教材，以免對數學談的是什麼以及數學應如何教學，產生錯誤觀念。

雖然過去和現在訓練小學教師的教育，頗具破壞作用。不過還有理由可以樂觀。惡龍，特別是神話裡的惡龍，在過去曾被屠殺。當前教育上的

惡龍，即使仍為許多教授忠誠信仰，也還是神話，也會被殺。



## 第十章 荒唐的市場： 聲討教科書

四種偶像包圍著人的心智；為區別起見，我們命名為……第三，市場偶像

培根 *Francis Bacon*

課程表和教師是教育最重要的因素。不過還有教科書，學生要從其中學習，至少能增強教師的貢獻。可惜，談到明白流暢的文詞，並非數學界神聖傳統之一，各級教科書的這項品質都很低。

造成這種情形的罪過，應歸咎於教授。學院用的教科書，只有教授能撰寫。中小學教科書通常是由學養好的教授和有經驗的教師合寫的，但是教授「顯然」是權威，支配整個計劃。就教科書而言，對教授我們能期望什麼？許多教授輕視教學法，另一些則對教學法完全無知。他們沒有受過寫作訓練（就連研究論文都有問題，更不必談教科書了）。從他們的背景和關切的重點來看，期望數學教授有良好的寫作能力，正如期望英文教授寫的數學研究論文能有優良的數學內涵一樣。

還有更多未能達成的期望。數學的步驟，解釋常不適切（實際上有如謎語）數學家由於不會用心去了解各層次學生應當學些什麼，所以不知道需要寫多少解說。不過，他們還是輕易的下了決定，認為說得少比較容易。這一決定由於數學家偏愛枯澀的寫作方式而更加強化。如若提出責難，他的回答是：「事實一樣不缺，全在這裡。」所能要求的只有這些，正確

成爲唯一的批評標準。想有更多的解說，常會遭到輕蔑的眼光，當然，只有愚人才需要詳細解說。雖然，簡潔常表現爲晦澀的化身，數學家的寫作似乎只對一項箴言看得認真，即簡潔勝於一切，甚至超過讓人了解。教授或許了解他自己所寫的，但對學生而言，似乎教授在說，「我已經學會這些教材，現在就是不要讓你學會。」

有些數學大師的著作，確是難解如謎語。關於這一點，最著名的是拉普拉斯。曾經幫助拉普拉斯準備出版其傑作「天體力學」的助教，貝奧特 (Jean-Baptiste Biot)，曾說，拉普拉斯時常不能將得到結論的步驟，重新逐步寫出來，因而在文稿裡插上一句，「這是容易看出的，即……。」顯然，現代教科書的作者，對於「人當效法大師」的名言，看得很認真，即使自己還沒有成爲大師，至少要顯得像大師的樣子。

有些教科書的作者相信，數學的陳述只要邏輯上正確，讀者一步一步老老實實跟隨作者，單單陳述本身就能解說明白。作者認爲不必明白說出意義，只要讀者慢慢細讀就能把握意義。作者不認爲需要爲讀者建立信心，解說這條路通往何處，爲何這一方式比那一方式要好，以及真正的成就是什麼。作者對一項證明如何形成，爲什麼起初有人追尋這項結果，爲什麼有人現在還需要這項結果，都不給予任何提示。實際上，這種教科書簡直是向通靈術挑戰。

有些教科書的作者，不願意或尙未準備好做研究，就在教科書裡展示「才華」。他們將明知道有關係的許多步驟，任意省略，而且在他們作學生的時候就曉得這些是無法自行補足的。他們故意省略這些步驟，認爲容易補足，是想把自己抬到大師的地位上去，不過，大師只將細微末節省掉。如果說這種責難太過激烈，我們要記着，就品性而言，數學家不論是研究人員或教師，正和整個人類的橫剖面一樣，在自大這一點上，數學家是人類裡較不令人喜愛的部份。無論如何，他們寫的教科書無法了解的地方實在太多。

令人驚異的事，少數幾種教科書，因爲有充份解說並且討論到各種觀念的意義，有些教授反而要加以反對，常指責這種教科書說話太多。對誰

太多？這些教授偏愛難解如謎的表達方式以困惑學生，再由教師展示其卓越才能來講解教科書。這種偏愛大家都知道，而且還可以找到書面證據。一所優良學院的教授在評論一本教科書時，曾說：「其中所寫的話過多，那些話通常應當由教師來說的。用這本書作教科書的教師會發覺，不僅正式講解離不開這本書，甚至連插話也離不開」。假如教授真是以觀念和批判性思考教學生，應該有很多事好做，如提供問題，指引學生思考、改正學生的聯想。不論這本書如何有幫助，這些都是書本無法可以代替的。

很多不良的數學著作，僅由於偷懶。有些數學家未能澄清自己的思想，就用下述短句來掩蓋自己的模糊不清，諸如，「顯然，那……」，「無疑的，接着是……」以及類似的話。如果結論確實很明顯，很少需要這樣說。大多數作者這樣說的時候，實在並不明顯。通常，斷言什麼是明顯的，大多不很正確。不幸的讀者必需不斷耗費時間去證實那些並非真正「接着是……」的斷言。

有些情形，只是由於作者無知而發生困難。甚至一般良好的數學家都很了解的問題，許多中學和學院用教科書的作者竟不知道。他們「寫」出來的書，主要是從其他書中，一章一節拼湊起來。如若根據的來源不合格，盜印成的教材自然也就只好如此。在這種書裡，會發覺有定理陳述不正確，結論並不全真，證明不完整，證明未考慮到所有情形，所用概念未加界定，所依據的較早結果是未經證明的，或後來才被證明的，所用公設未曾明白說出，同一概念有兩種不相當的定義，有和內容無關的定義，定理的結論和證明只部份有關，以及實際邏輯推理的錯誤等等。

數學教科書顯著的缺點是不能引起學習動機。作者突然跳入正題像被餓獅趕着來的一樣。一本書或一章的開頭常用的話是，「我們現在要學習線性向量空間，線性向量空間需滿足下述條件……」跟着就說出條件，緊接着就列出定理。為什麼要學線性向量空間？這些條件如何來的？都沒談。學生猛然被拋進這一奇怪空間中，只有迷失找不到自己的路。

有些開頭的話不像這樣唐突。好像是頗有啓發性的陳述，如「就此點，最好討論……」不過接着討論的部份，或許作者覺得不錯，學生通常並

不以爲然。另外常用的開頭話，「自然就會問……」接着提出一個問題，而這一問題即使最奇特的人也不會想到要問。

在談到數學的主題之前，不必總是先說學習的主要理由。也可從研究這一課程的歷史原因加以介紹。如若這並不能作爲今天這一課程仍然重要的理由，就應在談到主題後，跟着說明當前重要的應用。大多數應用均涉及物理科學，對作者而言實屬不幸，因爲只有很少的數學家和中學教師通曉物理科學。許多做得最好的作者，也只不過提一下這一課目有實際重要的應用。有些真的允諾要討論應用，但却並沒有這樣做。

科學問題並非引發動機的唯一方法。要教的數學可以和學生的世界發生關聯。只要有毅力就會發覺什麼東西會引發學生的興趣，可是這種努力遠超過作者所願負擔的程度，結果變成沒有血肉的光骨頭。即使最好看的美女，也要用服裝和化粧品來提高外在美。同樣的，數學也要和初學者的興趣相關聯以增加吸引力。

柯倫特，前面有關章節曾引證過他的話，對缺乏學習動機，也有所批評：

數學家經常受到誘惑，想將自己思想結晶的產品，以演繹的一般理論方式呈現，並降低個別數學現象，僅作爲例證的角色，讀者接受這種獨斷形式，很容易變成灌輸式的學習。可是，要有啓發性的感悟就必需對動機的了解。

一本教科書如從陳述公理開頭，就是一本省掉第一章的著作，需要讀者先有一些基本了解，否則對這本教科書就會無法領悟。

數學家給學生格外艱苦的負擔，是要學生遷就他本人的愛好。數學家都深知一般化和抽象的優點。當然，一項一般化的結論包括許多特別情形。因而，他們認爲立即教一般化結論更爲有效。邏輯上這是對的，但教學法上則是錯的。教科書的作者不顧一切向一般化直衝，可以看出他們的判斷力。

例如，在學生還沒有學過具體函數，如  $y=2x$ ， $y=2x+3$ ， $y=x^2$  等，就要他們去學以映射觀點所作的一般化函數定義。集合 A 對集合 B 映

射是序對集合，其中每個第一分量來自集合A，每個第二分量來自集合B。映射定義的廣泛性誠足驚人。父親的集合和兒子的集合的關係是映射，知道這項事實「顯然」增進親子間的關係。不錯，映射的定義包括上述具體函數，但也包括學生絕對遇不到的關係，或一定不能從數學定義啓發的關係。此外，一般化定義的不明確，反令學生不安。

一般化將只是一類已知的特定結論，擴展到更廣大的對象——例如，將原來只是等腰三角形已知的一項定理，證明其適合於所有三角形。抽象是從不同的許多類對象，選取其共具的性質而研究其含義。沒有人會懷疑數學的抽象價值，不過從抽象到具體的學習方式，一定有問題。兒童不會爲了瞭解狗，就先從研究四足獸着手。這一基本原則似乎數學家並不知道。他們喜愛抽象，放任自己迷戀於其中，因而不免以學生作爲犧牲。

前曾說過的有關教學方法上許多缺點，教科書也犯了這些毛病。用嚴謹的陳述來教初學者某一特別科目是常事。從概念的觀點來看，最難的數學科目是微積分。其中概念如憑直覺去了解遠較容易，這就是數學家從了解這一科目到建立適當的邏輯基礎，需要經過兩百年的努力（第七章）。但是現在的作者勇敢的以學生的痛苦作冒險。微積分教科書以概念嚴謹的公式化說明開始，好像一開頭就成功的消滅了學生學會這一課程的能力和信心。

有些作者用嚴謹的方式，由於自己缺乏安全感。恐怕有所折衷而幫助了學生，將被同行視爲無知。因此，他們就以教科書至少要精確完整，作爲支持其立場的正當理由，並堅持嚴謹公式化的說明，是獲致了解的最佳方法。結果是從複雜觀點來談初等數學。

大多數作者沒有從他們所學的英文得到益處，正如他們的讀者沒有從所學的數學得到益處一樣。數學教科書的撰寫不僅簡潔到流於病態，而且更令人感到沮喪、單調、枯燥、晦澀、甚至文法錯誤。作者力求保持客觀和與人無涉。正像批評某一教科書寫作的一位人士所說：「這本書就數學而言精通，就文法而言生硬，就文字而言鬆散，好賣弄學問但華而不實。教給大學部學生超過學生所想知道的，同時，對假定學生已知道的超過學



生確實知道的。」當然好的教科書要文筆生動、引發興趣，更應時時考慮到讀者的知識背景。可是幾乎沒有人這樣做。這些書不僅由機器印刷，更像是由機器所寫。

幽默是風格上一項因素。相關的故事或笑話確能使消沉的精神得以重振。但是教授反對，因為他們的教科書不知要使用多少次，幽默會變成陳腐，笑話會變得乏味。不過，這些書究竟為誰而寫？一位演員對生動的台詞或笑話重複說第一千次時，還像說第一次一樣，對這樣的事，教授又有何說？

除了由於能力不夠或不願意撰寫有趣味的數學書外，作者常喜賣弄名詞以迷惑讀者。不僅濫用了許多不必要的專技詞語，數學家還喜歡引用新名詞。例如，同態 (homomorphism) 和同構 (isomorphism) 已經用了很久，至少可以看出字源上分別的意義是相似結構和相同結構。可是，不說某一同態是一同構，反而常說這一同態是忠實的 (faithful)——這種陳述在傳達數學意義方面並無幫助，雖然，或許在暗示堅定而非法的浪漫情調上，有其優點。當然，新名詞的出現，常有引進新概念的印象。例如，一個數的集合的最大下界 (greatest lower bound) 和最小上界 (least upper bound)，這兩個名詞用了多年，也確能說明其代表的意思。可是也許為了簡潔，也為了使人更難了解，現在用的名詞是下確界 (infimum) 和上確界 (supremum)。原來的單值函數和多值函數，現在稱為函數和關係。還有，現在不再說滿足  $x^2 = x + 7$  的  $x$  之值，要說“真值”。顯然，現在的“真”很容易獲得，我們不再需要沉思宇宙的神秘，經常可以看到新名詞代替舊名詞。這種做法，甚至曾使十九世紀上半期和高斯同居於數學領導地位的哥西困擾，覺得必需對當時引進的新奇名詞加以指控。他說：「如若不是許多新名詞成為科學的重累，讓讀者很難跟得上研究中提供的太多新奇術語，科學應該有了重大進展。」

除了不要引進無意義的新名詞來代替原有的適切用語外，數學家也應將容易誤導學生的舊有名詞加以改換。例如，含有無理、負、虛、複等字樣的名詞，原是歷史過程中為了表示拒絕這類名詞而設，現在仍保留在數

學教科書裡，足以困擾學生。即使已往大數學家也曾因這類名詞而感到挫折。自引進虛數之後，為抗拒這一名稱持續達三百年之久，部份原因由於虛這一字暗示有難於接受的之意。高斯說過，如若 $1$ 、 $-1$ 、和 $\sqrt{-1}$ 單位，未曾用來稱謂正、負和虛數的單位，而用來當作稱直(direct)、倒(inverse)和側(lateral)數的單位，大家就不會產生其中含有黑暗神秘的印象。

無意義的術語只是所用語文的害處之一。數學家太過相信簡潔，常發明名詞的縮稱。例如，Partially Ordered set (偏序集合)現在縮稱poset。為了更求簡潔，almost everywhere縮稱為a.e.。這種嚴重錯誤，再加上原本惡劣的寫作，使得教科書幾至無法閱讀，更談不上了解。l.q.m.w. (low quality of mathematical writing, 低品質的數學著作)真是沒有止境。

術語的為害又因過度使用符號而增強。數學思考和運算由於使用符號而加速，數學進步的重大特點之一是引進更好的符號，這是無人可以否認的事實。但是，數學家將一項優點變成了害處。他們的教科書每一頁上都泛濫着雜亂的符號，正像有些現代畫家將顏料噴灑在畫布上一樣。一頁接一頁，幾乎沒有說明，填滿了希臘文、德文和英文的字母以及其他各種符號。有些書所用的符號多達數百種，理由是為簡潔，不過更有可能是為了藏拙。即使在真有簡潔的好處，也抵不過增加讀者記憶上的負擔。更壞的，在第五十頁初次使用某一符號，直到第三百五十頁再次用到，又不向讀者指出這一符號代表什麼。少數作者多少注意到這一問題，在教科書裡附載了所用符號的說明表。不過，讀者迷失在第三百五十頁時，只有中斷閱讀，在列有幾百種符號的表裡找出這一符號的意義，引起憤怒情緒自為必然反應。現在教科書中的符號，不是用來幫助溝通，反而成爲障礙。

許多作者似乎相信符號能表達文字所不能表達的觀念。可是，符號乃人所發明用以表達思想，符號決不能超越思想。所以應先說明思想，再在符號真正有助於簡潔表達之處，引進符號。但是，我們現在發覺大量符號幾乎沒有文字說明所含的基本思想。

和前面談到術語的情形一樣，舊符號法則也大有可以改進之處。或許最應更換的，是微積分裡  $dy/dx$  的符號。微積分傳達的一項最重要觀念，即導數不是商而是商的極限。雖然  $dy/dx$  符號原本要整體來看，看來像以  $dx$  除  $dy$  的商。事實上，萊布尼茲就是因為這樣，未能有系統的說明其正確概念。因之，這一符號似乎否定了教師努力表達的意思。更好的符號曾被提出，但是教授拒絕這方面的改變，其熱心和堅決正和他們支持傳統符號完全確當一樣。

十六和十七世紀的數學家，發表其研究成果常採取顛倒字母的字謎方式。用意告訴對手，他已經解答了一個問題並留下證據，但又使對手無法破解而宣稱也解答了同一問題。在接受詰問時，作字謎的人，才說出字謎代表的意思而確定他宣稱的發現。這種辦法一直持續到今天，只不過將字謎改稱為教科書而已。

數學家常說要傳授思考，推動的方法是幫助學生發現定理和證明。不過，教科書並沒做這件事，其形式和內容，整體和實質，只是定義、公理、定理、證明再加上晦澀。這種表達方式有一項好處（對作者而言），即撰寫比較容易，不必思考自己在說些什麼，因為通常大學部的教科書，其中的定理和證明已衆所周知。正像前面已經提過（第六章），大多數重要定理都經重複證明多次。每一次總有些改良和修正，使定理更一般化或使證明更簡短。一項很精巧的妙談常使證明更形緊湊。即使原創的證明是歷經多少週、多少月、或許多年思想的產物，是連續相承許多位數學家的共同貢獻，但是現代的證明幾乎一定是經過高度人為安排，十分巧妙，數學家稱之為優美。這些精巧的證明大約僅一頁左右，常使學生目瞪口呆深感自卑。不禁想到如若自己去做這樣證明，一定力有不逮。必然的結果是學生失去對自己能力的信心，為了通過考試，只有死記證明。

好的著作，一如好的教學，需要學生參與數學家得到證明的奮鬥過程。並且告訴學生最優良的數學家也耗費很長時間以及種種困難，才得到證明。通常又有好多自信正確的證明，發表出來後才發覺是錯誤的。這類歷史不僅可以防止學生氣餒和喪失自信，更能讓他們知道應作何種努力，準

備進行自己要做的證明。不過，教科書中的歷史資料，通常只是笛卡兒生於1596年，逝於1650年，有一私生子等。作者不願意對學生說實話，只知寫出證明，一個接一個，從不提證明如何得來。作者似乎暗示這些巧妙證明很有可能出自他們本身，有些人確是想製造這種印象。作者不肯承認赤裸裸的邏輯演示對心理所造成的傷害。

爲什麼教科書不能像談話一樣，不必太形式化？例如，作者要講的是三角形的三個高度相交於一點的定理。這一事實會使任何人覺得驚奇。作者何不先談一點，譬如說這一事實出乎預料之外，然後就先以直覺上理由說明確係如此，再給予正式證明。微積分教科書講到兩個函數之積的導數。學生預料的結果是兩個函數的導數之積，等到發覺並非如此自感驚奇。甚至萊布尼茲在這點上也曾弄錯，花了整個月的時間，才得到正確結果。萊布尼茲爲解決這一問題的奮鬥經過，這項事實就可以提出來討論，使學生肯定他們的智能並不低於萊布尼茲。這類談話應列在正式講解之先。

指責教科書正文解說中，未曾要求學生參與和思考，作者的反駁指出還有練習題，良好的練習題正是補救教條式教科書的好方法。但是，教科書每一節總有五六條已做好的典型例題，而指定的練習題也不出同一型式。學生做練習題時，只要從例題中找一個適合於練習題的，然後照例題步驟重複一遍，不需要了解，當然更不需自己做任何思考。學生就這樣完成作業且自覺滿意。教授也慶賀自己的教學法成功。

當然，例題是一定要有的，不能期望學生沒有指引就能得到解題技巧。不過，例題應有討論，說明涉及的理論，以及爲何用這樣解法，不用那樣解法，還有種種有關闡釋。事實上，例題不僅作爲實例，要和教科書正文配合一起，使學生不得不閱讀教科書（學生如不受壓迫常會逃避）。此外，有些練習題可能引發對例題產生疑問。也可能提出另一種解法，不論是否適用，藉以要求學生加以評估。只重複例題的解法步驟可能學到解題技巧，但不能深入了解和幫助思考。一般練習題是智力的苦役而非智力的挑戰。

許多教科書的作者誇說書中有好多例題。其實是說，學生不必閱讀教

科書或作任何思考。這些教科書應當稱為食譜。通常食譜提供實際做法：將半杯麵粉倒進碗內，加四分之一杯發粉，注入一些醋，烤一小時。注意看！一個餅烤成功了。但是，食譜並未將道理告訴廚師，為什麼這樣的混合物能做成餅。例題正像是得到解答的製餅法。如果製法改變，就會產生錯誤的解答，學生缺乏認識這項事實的識見，只要解答合於教科書所述步驟，就很滿足。雖然，教科書在教育界扮演很有價值的角色，但由於上述缺點，却使教科書變得不可閱讀。

更奇怪的，許多教授為他們班上選用教科書時，公開宣稱他們並不注意教科書的文字說明，只看例題和練習題。可是，學習思考及運用書籍，當然是人類文明中高等教育目的之一部份。顯然，這些目的已被拋棄。

教科書既然這麼壞，我們不得不追問，為什麼選用這類教科書？理由很多。大多數教授本身未曾受寫作訓練，看不出文字說明的惡劣。教科書不談動機和應用，反而受教授歡迎。因為這類教材通常取自數學本身以外的其他學科，教授如要教得有把握，就需知道一些其他科學。但是，現在的教授不懂科學，又不願只為做好教學工作而去學習。事實上，許多教授深怕任何教科書要他談到數學史以及科學和文化的影響。所以，他們選用一本正統的數學教科書，採取機械式和技巧性的狹窄路線以及例行的練習題。術語、符號、嚴謹——是數學家最珍視的。從他們這種觀點，自不能強調教科書必須具備上述特點。

選用不良教科書的另一重要理由，因為很多大學部課程都由研究生在教。對這類教師而言，現成教材和例行講解是不能缺的。任何適切但非通常的方式，特別需要有教學技巧的，他們不是忽視，就是弄得一團糟。

許多教授選用的教科書，由於其中一些課目是他們願意教的。但又不顧及教科書的表達方式，全照自己的方法去教。這麼一來，學生又面對一項任務，將教師講的和書上說的謀求一致，在數學方面這很困難。加上教科書編寫不佳，更使困難倍增。假如教授的表達果真較現用教科書提供者為佳，他應寫出教材發給學生，不必花費上課時間去抄寫黑板。其實教授的表達方式很多並不見得更好，只是他認為跟着作者說就是貶抑了自己。

大學教授甚至有心採用艱深的書，希望由於選用這類教科書而增加自尊。希望他人會認定教授和學生都精通這一本書，而獲得好評。實際上，選用這類教科書的許多教授，自己也不容易弄懂其中內容，學生更是昏亂不知所措。因此不論教授如何解說，反正都能混過去。

四年制學院的教授，對著名大學的一些教授，常感自卑。為克服自卑感，許多四年制學院教授想勝過大學的教授，就採用讓學生難懂的教科書。他們在專門學會開會時，如被問到用什麼作教科書時，一說出書名就已暗示為學生創造了奇蹟。採用這類教科書，又能表示要他們進行更高更深層次的教學，也並無困難。

從整體來看，二年制社區學院和初級學院的學生，水準最差，可是那些教師也採用很難的教科書，只為了自誇可以擔任高級的教學。他們一定要用這類教科書，理由是為準備學生轉到四年制學院。不過，他們已經傷害到學生，使他們無法轉學。能轉入四年制學院的人只有四分之一，且大都不再修習更多的數學課程。低層次學校用高級教科書的現象，在受一個主要大學影響的地區，特別流行。

許多教科書常經由委員會選用。一本含有任何應用題目的書，而為某些教授所不熟悉的，就會遭到反對。另有一些教授，不問是當與否，不同意講解的水準。更有一些人認為文字太冗長。妥協折衷的結果，選出來的一本書，必然是枯燥、無意義又笨拙的。即使單獨由一位教授為系裡選一本共用的教科書，也可能和許多其他人的一樣，由於缺少見識、信念、決心，常挑一本「安全」的書（通常也就是一本平庸的書），這樣才能使大多數教授滿意。

一個系裡，由於一些人不滿、抱怨，或原用教科書不再印行，也常決定更換教科書。可能想到用來代替的是一本良好教科書。但事實上，很難發生這種事情。因為系裡大多數教授喜歡的是老樣子，可以不必閱讀新教科書和做新練習。所以，更換的新書常是原用教科書的“複印本”。不過，有了改變在美國社會裡就表示有了進步。

教授選用不良教科書的原因很多。大多數教授是狹窄的專家。一位代

數學家被請去教微分方程，他對如何教這一科目並不重視。他只要一本容易教的書，也就是所講解的，不是一連串技巧方法，就是安排好次序的定理和證明，只需要他複誦一遍。

即使所有或大部份教科書均屬優良，許多學校的學生還是要吃苦頭。有些教授選用他感興趣的教科書，想要從其中學到新觀念和新證明，不問這本教科書對學生適合與否。一位代數學家挑一本高級教科書來教初級課程，不是爲了讓學生能學到什麼，而是要讓自己能多學一些。一家著名大學的教授用了一本比所教課程高兩級或三級的教科書，結果使很大百分比的優良學生，未能及格。另外一些學生，程度也很高，却因氣餒而放棄數學。當問到這位教授，爲什麼選用如此不當的教科書，他的回答是：他正在進行一項實驗。這好像在說，對一個人的心臟打六粒槍彈，看他會不會死。

爲什麼撰寫出這麼多不良的教科書？很明顯，主要原因是貪財。教科書帶來的是版稅，編寫的教科書一定要能暢銷。但是，反而只有不良的教科書能暢銷，所以心中想到錢的作者爲了投市場之所好，注意力就全盯在這上面。出版微積分教科書的歷史，正是這種情形的例證。多年來，表達微積分一直用的是機械方式或食譜方式，作者也就照着寫食譜。到了美國教授接受了較好教育，而決定學生應當受到專業啟發的好處，並在微積分教學中注入全部理論。大量嚴謹的微積分教科書立即出現在市場上。當這項教學法的大錯已發展到無法掩飾時，直覺方式施教又因受人歡迎而大爲流行。教授爲表現虛心和彈性也就轉向直覺方式。不多久，就是那些原來撰寫嚴謹教科書的作者，也編寫出直覺導向的教科書來，還誇說這種方式是他們提供的。教授確實學得很快——只要合乎市場的需要。

由於大多數作者目的只在最大可能的市場，他們不斷重複撰寫銷路好的這一類書。最低度的知識、差勁的寫作、標準的練習題，就是寫這類書所需的一切，不過，對於避免完全抄襲必需相當注意。但只要變動一下課目的次序，就能使一本書看起來似乎不同。通常這種教科書大約有二十五項左右的課目，按照可能的排列組合，多到能寫成上千上萬種爲學院用。

不同」的代數、三角、微積分和其他教科書。事實上，資料的不正確，或寫作的低劣，如和預期獲得的利潤相比，那就不必關心了。爲了掩飾和已有教科書顯然的重複，有些作者用了一些花招，如將原有很自然的證明，代之以硬行設計的證明，造作一些定義的說明和新術語，以及自己創設的新牌子符號等。當有人指責抄襲時，教授常會反駁說，真理原來就永不改變。

當然，每本書要有一個書名，所以會有像「學院用代數」、「學院用初等代數」、「學院用代數：全部課程」、「學院用代數：簡要課程」，以及「學院用代數：八分之七課程」等書名。顯然可能性又可以無窮變化。實際上，不是有無理數嗎？所以也可用「代數：無理的課程」這種書名。

完全模仿成功的教科書（財務上成功，通常絕非教學法成功），許多作者毫不遲疑承認是事實。還自負的說，他們這些書正是數學教育的主流，似乎這一事實就能保證書的品質。看看什麼樣子的書會暢銷，實際就知道主流裡的一本書一定枯燥而沒有創意，更是教學上的禍害。

是否所有的教科書都彼此重複？並非如此。另有很多不良的教科書，作者是研究某一專門科目享有盛譽的教授，或者在專門學會擔任高級職位的教授。這些作者所寫的書，是他們從來沒有教過，或難得教過的一門課程。他們對學院裡學生如何思考，以及有什麼知識背景，一無所知。但爲了將名字變成現金，也就毫不猶豫的投入撰寫教科書的行列。「天才」自然超越凡庸，這些教科書含有創新的概念和證明，但是學生却無法領會。課目文字說明是次級品，寫作足令人汗顏，更由於匆促趕寫錯誤頗多。每章每節開頭談某一目標，到末尾又談到另一題目。在同一節裡，作者從一項課目轉到完全無關聯的另一項課目。要求學生做的練習題，根據教科書的教材根本無法做得出來，如果能照着教科書做出來或許需要有牛頓一樣的才氣。爲了一部份市場需要一些應用，故作象徵性姿態，這些研究人員就概略的提到相對論或量子力學，對大學部學生的水準而言，這些題材可以說全無意義。顯然這些教授儘量趕寫，搶着出書，只爲了「賺」版稅。如若從他們撰寫的教科書來評估作者，任何值得尊重的研究所也不會准他



們做研究生。雖然如此，許多學校單憑作者的大名還是採用這類教科書。通常這類教科書由於太壞，用了一年之後，市場就直線下跌。總之，作者可說尊嚴掃地。更可笑的事是，這些有聲望的教授肯為基本課程趕寫教科書，却不屑於教這類課程。即使逼不得已去教，也羞於承認自己在教如此低級的課程。

有時，這些有聲望的教授，明白了如何適合市場條件，就搞發行第二版和第三版，因而賣了更多的書。他們的貪財和純粹商業精神，實屬可恥。後出版本雖然成功的賣出了更多的書，但也更成功的犧牲了學生，並且破壞了教育的目的。比較起來，廉價小說以及為稿費而粗製濫造的文學和藝術作品的作者，還更可原諒，因為他們並不藉口什麼倫理原則，也沒有啓發青年心智的責任。如若這些教授是真正有能力的研究人員，或者是為發揮有益人類的影響力而出任專門學會職務的人士，為什麼要看輕自己而撰寫這第一百種複製模仿的廉價商品教科書？是否公認為有才智的教授，也像少男少女一樣，對自己所負任務和人生目標完全分辨不清？

為金錢利益而寫作，確需趕得上市場。我們已知（第七章）數學教學和數學研究受到時尚的控制。解析幾何從前當作單獨課程在微積分前施教，現在併入微積分。成功的作者必需承認這種時尚，否則書就賣不出去。如果時尚是將線性代數編進微積分或微分方程，不論有無理由，編教科書就必需這樣做，一定將線性代數編進。為趕得上時尚，每隔幾年必需推出新版本。不過，教授不會反對，因為這樣一來消除了老版本的舊書市場，學生不得不買新書。

視市場需要而定，還很科學。出版商向各學院詳細探查喜歡教科書中包含些什麼科目，然後作者欣然動手提出迎合大家口味的教科書。至於作者自己的信念，教科書應當包含些什麼，即使他們有這種信念，也派不上用場。

正常市場可由特別的計謀加以擴大。計謀之一，是提出應用的部份，全擠到最後一章。這種蠢事是有計劃的。有些教授願意教應用，有些却怕教。如若放在最後一章，不想教的教授可以拖到學期結束，還沒有教到最

後一章。這樣少教一章就不會引起麻煩。應用放在教科書最後一章，無論怎麼說，都無助於教應用原來的目的。因為應用放在最後教，就學習數學的動機以及顯示數學意義的價值而論，未免來得太遲了。

爲了擴大市場，許多作者還用完全欺騙的詐術。在「新數學」流行的時期，有些作者拿起一本傳統教科書，在書裡東一處西一處插進幾頁新數學教材，在若干地方改換一些術語，再從頭到尾撒上一些名詞，如集合、交換律、反元等等。然後就宣稱他們提供的是「新數學」。許多教師幫助他們欺騙，因爲可以用來說服上級人員他正在教新數學，而實際上却仍然在教原來所喜歡且比較懂的教材。微積分教科書常裝飾一層嚴謹的外表，以取悅喜愛包含理論的教授。這些嚴謹的面飾通常放在第一章，後面永不會用到。

還有其他形式的騙人方式。一本書名，稱爲「生物學家的數學」，大家都會想到這本書的內容，不僅將提到生物學家要用到的數學，還會指引生物學家如何去應用。可是，全書真正內容和相同數學程度的任何傳統教科書根本沒有兩樣。

許多作者知道進入學院的學生，並不喜歡數學。不過，有些學院仍然要求修習一門數學課程，作爲取得學位的條件。即使不如此，教授也希望吸引學生以數學作選修，藉以保持較多的教授職位。因之許多作者撰寫的教科書，宣稱是爲欣賞數學在文化中的角色。書名都很動人：「數學——一項智力的奮鬥」、「數學——推理的科學」、「數學的欣賞」、「數學——創造性藝術」、「數學，藝術和科學」。但是，書裡教的仍是公理論、符號邏輯、集合論、數論等等，例如，同餘、二進位數系、有限幾何、矩陣、群以及體等，並沒有真正實行他們的諾言（第六章）。顯然，我們不能從書名來斷定一本書。

由於數學本身的課程不能吸引文理學科學生，被認爲很少有價值，因而有些教授就採取另外的辦法。在他們的書裡，將從未被重視的奇談、瑣事、謎題以及片段的最低級課目收集在一起，學生無需任何思考。各章間完全沒有關聯，學生不必連續不斷的思想，而教師也可以隨意挑選來講。

由於這種辦法還難使學生發生興趣，有些教授乾脆用加進卡通的妙招。甚至有些微積分教科書用卡通畫使之「生動有趣」。爲什麼不能？不是大家都說要想像數學自有樂趣嗎？或許特別真正幽默的卡通畫，可以用來作爲學院階段的教學用具。可是，連六歲小孩都不會發笑的淺陋連環畫，實在很難有任何貢獻。卡通畫可以告訴我們一件事，那就是讓我們確實明白作者的智力水準。數學教科書還沒有依靠色情畫，雖然這一方式用來吸引學生還比較可以接受，因爲沒有假裝是爲數學教育，也不致使人產生誤解。

這類幼稚庸愚的「文理學科」教科書，銷路也很好。不問學生是否爲教材的價值所欺，總之，他們能得到這一課程的學分，又不必真正用心去思想。教授教這類教材毫不費力，同時也「解決」了文理學科應教些什麼的問題。

許多教授表示很關心升入學院的標準降低。由於任何中學畢業生都可以自動升入學院，勢將降低所有學生的教育水準。但是，出版像上述的文理學科教科書以及食譜式教科書，又爲成千上百的學院所採用，這些教授早已將標準降低到可能的最低水準。

從教科書撰寫得到的金錢收益，腐化了許多教授。有些作者要求出版商保證能收入 100,000 美元。顯然作者對自己著作沒有信心，想從保證確保其收益。作者常用的理由是出版商出具保證後，才肯盡力推銷一本書。這實在不成其爲理由。出版商對一本書的投資約在 50,000 至 100,000 美元。當然，沒有一出版商會投資這樣一筆錢，而不盡力推銷。如果作者要求超出書本身條件以外的大力推銷，應受譴責的自屬作者。

管制教科書的品質，有兩種可能的方法。第一是檢討批評。大多數教科書都會受到一種或多種專業性雜誌的評論。不過，有些評論者顯然太客氣，未將大多數教科書應受的非難說出來。只說明內容並和同類的書比較，最後反而用「讚美之詞」說這是一本好書，因爲和市場上其他的書正好一樣。另有一些評論者遵守「罪犯間相互尊重」的原則行事。對於將不必要的困難加於學生，又未將一項課程的價值教給學生的教科書，需要的是坦白定罪式的批評。

雖然對教科書的批判性檢討很少，還是可以找到一些。一位評論者對一本微積分新教科書的批評，在提到另一本暢銷的微積分教科書書名之後，他說，「假如那本暢銷書是盡力之所及的著作，那麼這一本書中的練習題遠比那一本更缺少想像力。」

有人盼望出版商管制教科書的品質，不過這並不公平。出版商在接受稿件之前確實請人審核。但是審核人員通常也就是教同一程度課程的人。他並不將教學法看得比作者所覺得的更重要，也並沒有更好的批判力。只要認為這種教材他能用以教學，就通過了稿件。

此外，出版商公開目的是做生意賺錢，他無法改變市場。如不向市場妥協一定先敗，不能靠品德上的獎酬而生存。出版商對所出版的書，無疑的一定會誇張其品質。也常設法預測趨向，並藉推銷來加速其前進，使人有這種教科書已有廣大需要的印象。在新數學醞釀期間，就發生過這樣的情形。現在由於預見新數學的命運，出版商又趕着和新數學分手。出版商常受到的批評是說，他們出版的書和市場上已有的另外幾十種正好一樣。可是，如果一家出版商要繼續存在，就必需每一學科都有可以出售的書，所以不得不出版市場上已有的書。好的出版商為對出版一些濫書謀求補償，會印行高品質的單冊專論和論文集，雖然會賠錢但能獲得聲望。

出版優良教科書的責任，顯然在教授身上。不幸他們實際上將自己的身份看成是出版書的特許證。近時，他們為獲得充份讚揚，只有讓步，在開頭的一章都講集合論，不問和全書是否有關，也不問後面各章是否會再提到。

優良教科書的需要實在太迫切，對提高教育水準的能效，難於衡量。不僅學生受益，新教師，教不熟悉課程的老教師，甚至博學能幹的教師，都能從優良教科書學到很多。作者專心選擇和計劃教材歷時數月或數年，自無法希望教師在一個以上的領域裡都能達到這樣的水準。

教科書的品質低劣，是對教授最嚴重的指控。那些能做得更好的人，完全投合市場，實屬自損品格。那些為從未教過或很少教過的課程，撰寫教科書的人，就人格完整而言，也應受指責。有經驗的教師，誠心編寫一

本好書，就能證明教學藝術和寫作藝術都是難得具有的天賦。

上述對美國數學教科書品質的貶抑，似乎過份或顯得誇大。但事實並非如此。教科書的低品質以及課程和課程表內容與教學的不良，都是國家教育努力發展的後果。普及教育的原則，使學生受到從小學到他能達到的最高層次教育，在已往和現在當然都是大家共同的願望。但是經常不斷流入的移民，大都貧窮而又無知，他們加給美國的負擔，使得在任何情況下都難於承受。更使這項問題惡化的原因，是近三十或四十年來，特別強調研究，將人力從教學方面轉移出去。切斷水流流入一切教育努力的泉源——學院中的教學。現在來培植誠心而有能力的數學耕耘者或許可能已經太遲，因爲數學既是科學也是藝術，所以他們應該認識到在他們所用的媒介中，解釋說明的重要性和在繪畫、音樂、文學的領域內沒有兩樣。

## 第十一章 義不容辭的改革

在我看到教育上能有許多改革時，我對社會的改革有了希望。

萊布尼茲 *Gottfried Wilhelm Leibniz*

美國教育系統的缺點，無法以一種措施予以消除。沒有一種療法能治百病。不過，一點一點的，醫藥克服了一些病症並減輕了另一些病症的嚴重性。在教育領域裡，大學不顧很多研究品質很低且和教學無關，仍堅持研究作為約聘教授及永久教職為條件。大講授班、大規模運用教學助教以及不良的教科書，都對數學進展和教育效果產生重大致命的傷害。某些補救步驟很明顯，我們應欣然從事。

第一項補救方法是認可做學問（scholarship）與研究同樣有價值。在數學方面，研究指的是創造新結果，至少是新的證明方法。做學問基本上意含廣博、精深的知識，以及對知識的批判態度一目前正受藐視。研究和做學問之間的區分，在社會科學、藝術、以及人文學科裡並不存在。有人挖掘出某一古代文明的事物、有人為一些重要或不重要的歷史或文學人物，撰寫詳細的或批判的傳記，有人將各種經濟理論或政治理論綜合一起。這些人雖然在其著作中可能連一件新事實都沒有提供，但仍被認為具有創造性。當然，在非數學的領域裡也有深具潛力的思想家，他們有些作品和數學產生的結果，同樣新奇並富創造性，不過要區分新的和舊的不大

容易。無論如何，在這些領域裡，新作品只占被接受、甚至被尊稱為研究的很小一部分。對已有成就再加探索（所以英文字“研究”即為 re-search）受到的重視和新作品相同。事實上，一本批判性傳記，或對某一人或某一時代的評估，所受到的讚譽遠超過其中所評估的某一人或許多人的成就。對數學研究所作的清晰明白的解釋或說明，其價值遠超過大多數研究論文。不幸，這類陳述，即使品質很高，也不受重視。但是，這些學者，（有深厚廣博的數學知識，又有溝通傳播能力的人，不論他們對新結果有無貢獻）能夠消除很多害處，完成許多亟需的任務。

近時，由於過份強調研究而逼出來了成千累萬的論文。除了不合理的迫使教師和學者去做研究，也使數學家不得不走向專門科目，以便趕上他謀求出版那一範圍內已有的水準。結果是價值深可懷疑的庸愚論文劇增，而數學分裂為不能配合一起的零星碎片。現在比任何時期，更需要有人破解密碼暗語式的研究論文，從污泥裡搶救出寶石，將出現在幾百種雜誌裡互不相關的一大堆論文，以貫通一致的說明連繫起來，並對真正有價值的貢獻給與突出地位。

更難得的是學者能夠闡明研究論文中不易了解的結論。由於他們肯花更多時間閱讀已出版的論文，也能查出重複的結論。知道重覆的結論會被查出，這件事就能嚇阻那些存心將舊結論以新術語和新符號偽裝再出版的人。學者能夠擔任著作的批評者，這樣也迫使作者及出版商因為怕受批評而提高水準。

學者的其他有價值功能，如對某一領域所得結果，撰寫闡釋性的論文，使這一結果和所用方法能有助於其他領域的人了解。這種論文能將單獨看來並不重要、只有專門人士才能認識其意義的許多論著，以一項可以領悟的解說聯繫起來。闡釋性論文不僅能增進、擴大當前狹窄研究人員的知識，更可以顯示、綜合不同領域作品的關係。此外，還能幫助科學家和工程師學習對他們有用的作品。縱覽性論文現在確實不時出現於文獻之中，但那是某一領域的專門人士為專門人士而寫，對局外人並無助益。

現在研究人員舉辦數不清的討論會研討某一專門的主題。物理學家和

工程師聰明得很，知道無法了解，通常都不參加這類會議。反而花時間創新自己所需的東西，即使他們的創造可能早已存在於數學文獻中。學者可以主持一種會議，將研究及結果向廣大範圍的數學家、物理學家、工程師加以解說。

在出版物泛濫的今天，迫切需要明晰的、批判的、透徹的綜合工作，藉以評估各專門學科發現的意義，並從較高層次問題的觀點來做這樣的評估。這類較高層次問題，是促使專門化發展的第一步，而常為偏狹的專門人士所忽視。因之，綜合工作和綜合工作者，要不停的活動，並站在什麼是整個學科正做和應做的最前線。當我們想到大量人力、財力和專供數學研究的空間，以及研究和教育的對立，那麼，評估數學的研究，以及決定研究是為什麼目的和為什麼人，自然非常重要。

學者對某一特殊專門化的價值和方向提出問題，將使異議者的精神和活動繼續活躍。專門人士應為自己的活動提出辯護，不容躲在一些口號之後，說「我正從事藝術創新」，或「我喜歡我所做的」這一類話。這些令人討厭的人還有一種功能，就是常提出為許多專門人士所忽略的問題。辯論是健康的象徵。他們不僅設法減低時尚到適合其價值的規模，還可能支持不合時尚而有價值的研究以及表面看來似乎荒謬的研究。如果沒有做學問的人來綜合、說明、闡釋和批評研究，任由當前大量分散的科目不斷在量上增加，將使其中小部份有價值論著的品質、見解和效用，也喪失難覓。

從上述對學者的定義，他們理當充分通曉數學史，其中許多教訓足以讓所有數學家注意。例如，時尚能決定一些研究的方向。過去幾世紀完成的一些無意義研究，可以用來抑制當前蔓延的時尚之火。歷史也能將主要問題和目的提示給數學家。研究人員接受數學史學者提供的知識，甚至可能從認識過去真正偉大的作品，而學到謙虛。

做學問並不容易更非淺薄，並不像研究人員想教我們相信的那樣。做學問要有比大多數原創性研究需要高貴的心態，也需要能辨別出有重要意義的或偶然連帶的結果；需要老練的、發展良好的常識，還要有富於同情的想像力。



麻省理工大學，著名物理學教授魏思柯夫（Victor F. Weisskopf）曾說，所有各門科學都需要學者。在「科學」週刊（1972年4月14日）一文中，他說：

科學界裡另一項破壞因素，是不重視明晰易解的陳述。這種輕視遍及所有層次。科學刊物的文章結構和語文，一般都認為無關重要，一切價值全在其內容。連所謂縱覽性文章也只有專家才懂。撰寫文章或書籍提供給非科學家閱讀，被認為是第二流的事，除了少數著名的例外，通常都讓未受科學訓練的科學作家去做。其中有些人真是優異的解說者，但這樣總有點不對。如若一個人深為其觀念的重要所影響，自應以可能最好的措辭試將這項觀念傳輸給友好……或許一篇明晰感人有關現代科學某些觀點的陳述，其價值超過許多博士論文中那種所謂原創性的研究，而且還更成熟和具創造力。

為什麼學者未能完成上述各種功能？因為正和研究相反，做學問不受重視，教授就不肯致力於此。在數學界，學者沒有地位。他不會受到約聘，即或碰巧得到約聘和永久教職，他的作品也不被承認，找不到現成的市場。現行政策禁止有聲望的雜誌刊登沒有一新創意的報告。

數學家組成的團體，總是排外、勢利和高度自私的，自命為優異份子。地位的決定完全看某人在數學上原創性貢獻的重要性。在這種團體裡，最高的獎酬贈送給在數學演進中留下永恒標誌的人（至少同行的意見這樣認定）。大多數做學問的數學家，常被看作是自認失敗的研究人員，在純粹數學競技場裡無力爭勝，僅被默許加以收留。所以，在地位意識很高的數學界裡，違犯獲得尊敬的原則，需要勇氣，甚至犧牲精神，不怕遭受嘲弄或排斥。

能達到上述功能的學者，不一定是優良的教師。對研究加以消化、綜合和評估需要時間、精力以及特別投入的心智，正和研究本身一樣（事實上，比大多數的研究還要多）。當然，學者有更廣博的知識，單憑這一點就很適合任教。不過，只有知識並不能成為一位好教師。如何解決教學問題？如何找到有能力又肯奉獻的人，去配合課程撰寫教科書，足以激發和

滿足各種不同興趣學生的需要？肯花費時間去輔導學生；會準備去促發發現的主題與過程；在教學過程中知道採納有吸引力的應用—包括物理、社會、生物科學方面以及心理學、保險統計和其他領域；能利用新的教學工具，如實驗器材和影片；會激發學生思考；願意學習考試和評分的理論和方法；當然，還要能和青年人溝通。他們也應關切中小學的施教，使學院的課程建立在進入學院學生真正瞭解的基礎上。這些令人想望的人士還應明白，學生對抽象能了解到什麼程度，以及不同年齡學生對什麼動機最有興趣（參閱第四章）。

顯然，我們需要教授團裡有第三類的人—即教師—來完成與研究人員和學者完全不同的功能。我們需要的教師，應使學生和喬叟（Chaucer）一樣會說出：「學的愉快，教的開心（gladly would be learn and gladly teach）。」專門人士相信他們科目的價值，不過他們的信念通常就到此為止。正像研究能得到學者的補給，教師也仰賴學者的支助。否則教學將成爲重複、陳舊、過時、或不正確的閑話。學院需要補充教師這一問題，規模之大，很少爲人認清，要知道現在各學院和大學的大學部學生爲數達一千萬人。

學院的行政主管和教授承認、或者試圖承認一項公理，即對專門科目有良好準備的博士，作爲研究人員既很優秀，又有才智和誠意專心於其科目，一定會成爲卓越的教師，至於教學的準備、訓練和特別要求，並不必要。他們不願經常觀察到的事實，而堅持這種想法。實際上，學院的教學是一項非常重要、需要好好學習的專業，應有完善周詳的方案以發展從業人員的必備技能，以及選擇能獲得這類技能的人。許多教授以輕視的眼光來看這種教學所需的訓練。爲使教師能熱心於學院的教學事業，大學的態度和政策應作徹底改變。爲輕視教學而抗爭，則研究的特有舊習以及對研究的歌頌和最高獎酬，應加制止。教學要在每一方面和研究獲得同樣獎酬。教師在整個就業期間，影響到上千上萬的學生，對社會的重要更超過研究人員—除非有一位是牛頓。當前，教師總算被保留下來，但只是受到容忍，他們的薪水永遠低於研究人員。

有個常被提到的理由；教師不自振作。如若上述各項功能確實需要，並且做到，則教師不會有不振作的可能。實在說，研究人員不振作的危險還更大。我們已經注意到（第四章）他們確會有智窮力盡的情形。由於他們的功能是加強一個系的研究能力，如果確有退化，在他們永久教職的許多年任期內，才真是無用。

許多人都曾經要求重視做學問和教學。橡樹嶺國立實驗室主任，溫柏（Alvin Weinberg）博士，曾坦白說過：

第一點，大學要給與有廣博看法的通才以地位和聲望，如同現在只給與偏狹看法的專門人士一樣。第二點，大學應再奉獻自身於教育，包含大學部學生的教育。我了解對第一點措施，大學方面會有懷疑。專門化應受「祝福」，是因為只有專門人士知道所談的什麼。假如只有專門人士知道所談的是什麼，那麼，就只有通才知道根本上為什麼要談。

溫柏博士在「科學」週刊（1965年5月6日）一篇文章裡，強調教學的需要：

大學要認清自己傳統的使命—教育青年。研究生以前的教育，使大學成為完全的體系。大學部學生這一層次的適當教育，和最高層次不同，不要太專業化和嚴謹化。正像個體重視種系發生的經過一樣，基層教育要適當的重現—學科的歷史路程，和其他學科的關聯，以及實際目的，總而言之，重視這一學科在整個計劃中的地位。如若大學認真辦理大學部學生的教育，不視之為稀釋的專業教育，大學界應力求擴大眼光。

是否期望學者和教師能有著作出版？雖然不免有例外，但有些出版物也是適當的。不過「出版物」這一名詞應作廣義的解釋，不只限於有新結果的研究論文。一篇優良的解說性論文遠比大多數研究論文有益於更多人。一本優良教科書抵得過上千篇研究性雜誌中常見的無價值作品。討論教學法有意義的文章，非常需要，應受歡迎。

是否所有的學者和教師所為悉如預期？當然不是。這些人素質差異也

和研究人員一樣。促使自我發展和趕上時代，要有一些壓力，如以晉級和加薪作為獎勵。強迫研究人員繼續產生高品質的研究，也都是藉着這類措施。

學者和教師必需訓練。現在數學研究所的教授不能做這項工作，一定要有改變。適切的課程是研究教授所不能教的，而他們甚至認為教這類課程有損尊嚴。紀聘的教授應當是贊成訓練學者和教師的人。為志在學者和教師的研究生編列的課程，需強調知識的廣博而非專門化。此外，一定要補充物理和社會科學的課程，使未來教師能用獲得的知識，以引發學生的動機和傳授數學的應用。有了這樣的教授和課程，將教育出未來的學院教師，並使他們也能適切的教導未來的中小學教師。

擴大研究生教育的必要，還另有理由。當前教育程序中有一項新特點，即二年制社區學院的興起。有些數字很關重要，加州大學分設八個大學中心，共有學生十萬人。加州州立學院系統分設十九處校區，共有學生二十五萬人。此外，加州有一百所社區學院共有學生七十萬人。就美國全國而言，全天上學的大學部學生有百分之五十分布在約一千兩百處社區學院，其餘則分布在一千六百處四年制學院和大學，而社區學院學生的百分數還在增加。

社區學院面對一些特別的教學問題。編列的課程有三分之一主要目的是以補習幫助學生。約有百分之七十五的學生只要學習技術性科目為就業準備，兩年期滿即終止求學。因此基本的計算、統計、機率和應用數學業科目，應受到特別重視。顯然教師一定要有廣博知識背景，具有科際間溝通的技巧，並願就學生需要而從事研究。

許多社區學院對約聘博士頗多顧慮，甚至喜歡約聘中學教師。當然，博士的準備是為研究，不是社區學院適當的教師。其中真正想做研究的，對教學沒有興趣，一旦謀得大學裡的位置，就立即離開。至於那些願意從事所要求的教學任務的人，又多半準備不夠。大多數博士即使在四年制學院任教，其準備也並不適當。他們也要求教統計、機率、計算機科學和物理應用，但如何和興趣配合，他們一點觀念都沒有。

研究生計劃，除了為訓練二年和四年制學院的教師外，也應為其他有關人員服務。例如，其他科學的研究生以及中學和學院的教師，想增進他們的知識背景，回任教職的家庭主婦，現職工程師和統計人員，自認有接受更多數學訓練的需要，此外，還有尋求或趕上時代教育的成人。研究生計劃要和這些要求配合。歷史不能保證預言，但是技術成長似乎顯示：不做數學研究的專業人員，對研究所教育的需要日增。

不幸，許多優秀的智識份子可能有心致力於做學問和教學，可是學者和教師的訓練，因教育方向錯誤，現在已形成障礙，甚至成為浪費。「美國數學月刊」(1969年九月)刊載芝加哥大學赫斯坦(I. N. Herstein)教授一文，指出：「為做研究而訓練的學生，其中百分之七十五在得到博士後，從未再做研究。他們在二年和四年制學院任教師，並未要求研究。」另有其他調查證明上述事實無誤。此外，根據對博士研究情形的調查報告，甚至每年出版一篇論文的人數都少於20%，更不必談這些論文的品質了。

無疑的，有許多因素使得博士得到學位後，不願或緩從事研究。大多數這些人，其才智既然足夠完成博士學位，自應可能訓練成為學者和教師。可是，現在只有被迫去修習研究導向的博士。實際訓練做研究人員，後來又要求他們以大部份或全部專業生活期間去從事教學，因而促成大學部學生教學的大災難。由於大學未曾認清，致使百分之七十五的人，教育方向錯誤，浪費了教授和學生巨大的時間、精力和資源。

幾個獨立的委員會曾促請重訂和擴大研究所的目的。其中一項建議特別受到注意，那就是為學者和教師設置一種新的學位，稱為「學藝博士」(Doctor of Arts)。早在1946年，鍾斯(Howard Mumford Jones)在所著「教育與世界悲劇」中，主張為學者和教師另設學位。卡乃基高等教育委員會，在1971年，一份名為「減少時間，增加選擇」的報告裡，不僅支持學藝博士學位，更指出這一學位比哲學博士遠更適合於未來教師，這項報告說：

我們認為減少專門化和研究對整個高等教育的衝擊非常重要……哲學博士學位勒住現今大部份高等教育的脖子。最大獎酬給與對高度專門

化有興趣並從事研究的人，有時幾乎使人對專門化的重要程度和自己的興趣，完全不加考慮。課程表近乎完全跟着這一路線，以滿足專門化教師的興趣，為專門化而訓練學生。哲學博士論文的要求，將研究生引導走向研究專門化，不是走向教育學生。從實際選擇過程和訂立成就標準，有時使得學生成為「有訓練但無工作能力」的人。我們現在選擇和訓練研究生做研究，但後來聘用他去教學，隨後又再根據研究決定晉升。這樣不但使他本人迷惑又破壞教學實施。

這項報告強調需要一項學位計劃，授與擔任教師的人一科資格。這項方案的存在就是明白宣佈教學也很重要，應得同樣獎酬。越來越狹窄的專門化，不能支配高等教育。實際上，學藝博士應為文理學科標準的高級學位，而將哲學博士留給專為研究所訓練的少數人。紐約卡乃基社團和斯羅安基金會支持在幾所大學裡創設學藝博士學位。到1975年，約有二十三所大學，但均不屬最有聲望的一類學校，已在一個系或較多系裡頒授學藝博士(D.A.)學位。

雖然，為學藝博士所訂的條件，校與校間有所不同，但均要求比哲學博士學位有較廣博的知識，可能包括一項課程，討論文理學科教學計劃的性質和問題，以及提出闡釋及說明性的論文，並顯示明晰寫作的的能力。這種論文可能綜合已有的知識，或者設法處理許多尚待解決的教育問題，像動機一類的問題。

許多人相信學藝博士學位是簡化的博士訓練計劃，是第二流的哲學博士。事實上，哲學博士才是第二流的：其候選人修習的例行課程，由考試表現其學習能力，如若要通過這類課程，任何學藝博士能夠做得同樣的好。至於修習的專門課程和研討會，也只要有學習能力的人都行。當然，還要有論文，在數學上至少要求原創性研究。不過，問題是由一位教授安排，而學生常不斷受到教授的幫助。所以在本世紀初二十五年的重要數學家赫維茲(Adolf Hurwitz)說得很對，他說：「一篇哲學博士論文，是一位教授在不良環境下撰寫的論文。」

經常這類論文並不是對新知識的一項大貢獻，即使是，也不一定是學

生的貢獻。所以，哲學博士不能證明有研究潛力，或者預示繼續有興趣於研究。最後產生的結果和指導教授的標準有很大關係。不過，通常很低。因為有些教授太仁慈，另一些太急於顯示他帶領出許多有博士學位的學生。有聲望雜誌的出版評核標準也不能保證什麼，因為在今天，幾乎任何東西都能出版，而事實上，論文出版已不再是一般要求的條件。就許多科目而言，哲學博士論文對知識原創性重要貢獻的要求並無意義。物理和生物科學的研究生常是一個小組中共同工作的一員，被允許選擇小組研究成果的一些細節，撰寫論文，不論是誰的真正思想。在社會科學和人文學科裡，哲學博士論文，越少談到原創性和重要性越好。

另一方面，說明性、批判性、歷史性的論文，如學藝博士所要求的，必需是學生自己的作品。是誰做的疑問遠較減少。學藝博士論文的品質，正像哲學博士的一樣，要看學校的品質和教授的標準而定。由於要求候選人的品質和表現太嚴，指導教授有理由向學藝博士候選人說，「你如果吃不消這項訓練計劃，可以決定改修哲學博士學位。」

通常哲學博士訓練計劃的結果，是一個知識偏狹而對太多事物無知的人。學藝博士可能並不比較聰明，但比較廣博，而且所受訓練適合於他以及大多數哲學博士後來要做的工作。

不必禁止學藝博士做研究。假如喜歡研究，可在時間允許範圍內自行研究，也可以後來再修哲學博士從事研究和出版。甚至大學僅依據出版物就可以頒授哲學博士學位給候選人。那些出版的論著很可能比溫室裡硬逼出來、由教授指引的哲學博士論文更有價值。還有一種辦法，學藝博士能在像普林斯頓高級研究所一類機構，尋求研究的訓練。這類研究機構不頒學位、不給學分，只提供課程以及能和研究方面領導人物接觸的機會。研究的訓練可能在獲得哲學博士學位之後進行，正像得到醫學博士之後，再訓練進而專門於某一醫學分科。

另一團體「另一方式研究生教育小組」在其報告「學問應為社會」（由教育測驗服務社出版，1973）中，也主張研究所的訓練計畫要擴大。認為從近代需要和環境變動的觀點，研究生訓練計劃應增加新的因素和擴展

所關聯的範圍，科際的研究也需加強。這一小組指責研究所只專心於為研究和出版而訓練。要促請現在研究教授控制下的研究所教授團，對自己擔任的專業角色採取眼光遠大的看法，即使研究所教授的永久教職、晉升、加薪的決定，也不應只依據研究和出版：

改造研究所的教授團，使成為探尋對人類社會可能性新了解的領導人士；並且改造研究生制度，俾能以確保進展中的社會結構性改變之意義的各種方式，輔導政治和文化的領導人士，這才是問題所在。……研究生教育有了新的任務和新的對象。

小組的結論是，要「對每一研究所及其主要學科的基本目的和組織重加評估。」

哈佛大學校長波克（Derek C. Bok）在向監事會提出的年報（1972—73）中，對哈佛的「文理和科學研究所」有十分坦白的陳述：

對學生擔任教師或教育者的角色，所作訓練尚不夠充分……事實上，大多數得到博士學位的研究生，仍然從來沒有接觸過有關高等教育最有益的文獻，從來沒有有系統的探討作為教師、委員會委員、系主任會遭遇的教育的問題……這種情形很難辯解。學生接受研究生訓練為了追求特定的終身事業，但是研究所只為他們專業生活的一部份作認真的訓練。這種辦法，在社會對學院的教學品質以及傳統高等教育形式日漸盾疑的時代，很難認為適當。

波克校長同意其他的調查，即使哈佛的博士，也越來越多人致力於以教學為終身事業，所以他又說，「我們已有如此眾多的學生將大部分終身事業主要用在教學機構中，如果還繼續對研究作排他性的特別強調，實在奇怪。」他更指出這個問題並不算新，已經由過去的校長、院長和反偶像崇拜的教授多次提出。

但是，不論在哈佛或其他處所，仍然極少改變。不過，最近的將來，大有機會使大學將研究所訓練計劃擴大。果真如此，則就大多數情形而論，並非由於願意補救現有計劃的偏狹，或者由於對社會需要漠不關心而良心難安，而是為了多收學生、多收學費、以及減輕財政上的困難。



當前教育上努力的結果，形成截然不同的兩種形式。研究在美國成爲關係生存的活動，大學如若沒有研究方面的聲望，也就沒有財務上可能的收獲，所以各大學都用盡人力和其他資源以爭取這種聲望。可是美國整個國家誠意奉獻於使普及教育達到越來越高的層次，需要有廣博知識的優良教師和學者，却還沒有產生。正像兩個人從相反兩頭拉一根繩子，直到斷了，全都跌倒在地，所以，兩相競爭的教育努力，產生很大損失。研究降低到沒有結果的專門化，而各層次的教室內，用的則是訓練不夠或訓練錯誤的教師。在教育領域裡，斷了的繩子中間的空間，是仍待教師和學者充實的真空。

甚至連研究生都不能教的研究教授，是尚待解決的一項問題。實際上，有某些情形，教學和研究能相互補充，有些教授從教學確能獲得激勵。此外，在沒有研究結果期間，教學使得教授心理鬆弛，因爲他將這一段時間作了有益的運用。還有一層，任何教授只要有值得研究的方向，都期望繼續追求下去，而他的學生還是最可能做這種追求的候補人。研究人員如若不能或不願教學，應由完全專心研究的研究所約聘，不擔任正式教學和參與頒授學位。在這種研究所內，研究人員可以全部時間自由追求自己的興趣。

將不能或不願教學的優異研究人員分開，有很大好處。將正式教學負擔加在這些人身上，會使他們損失時間和精力，對有價值的研究分心。同樣重要的，是這類研究人員應脫離對大學政策的支配地位。雖然他們的思想境界極高，很像群山之中突出的高峯，但是岡嶺範圍究屬有限。以他們來扮演教育過程中的角色可能有害。只要研究人員被認爲是大學人士中的精英，比學者、教師和行政主管更有價值，他們的需要和意見就會凌駕其他人。何況，其中還有一些人自命不凡，輕視他人，自是對忠誠能幹同事的一種侮辱。認清研究人員的缺點，並幫助他們發揮有效功能，非常重要。德國和蘇俄多有由政府資助的研究所，專爲研究人員而特別設置。例如，由德國的「馬克·布蘭克（Max Planck）科學促進學會」指導的「馬克·布蘭克研究所」，包含約有五十個研究機構，從事很多不同領域的研

究，共紀聘人員達一萬人。這一學會直接繼承1911年成立的「威廉大帝（Kaiser Wilhelm）學會」。其中之一的物理研究所，係1917年為愛因斯坦所設。這些研究機構自由選擇各自研究的方向。美國雖有政府資助的實驗室，但都負有特定使命，不能自由決定他們的研究計劃。位於普林斯頓的「高級研究所」（和普林斯頓大學無關）是唯一近似德國和蘇俄研究所的機構。美國私人資助的這一研究所，難以成為所有應容納者的避風港，但其貢獻不能輕視。例如，當愛因斯坦為希特勒所逼離德來美，這一研究所就選他擔任創辦數學部門的六位專門委員之一。當然，有了這類研究所，就能讓優秀研究人員保持積極研究，使大學本身紀聘的研究人員，只限於推動訓練研究生的各項功能。

還有另一種辦法，有些大學可以採用。少數大學公開宣稱，其主要功能為研究和訓練研究人員。這類大學的教授團，不是不能教大學部學生，就是由於研究要求太苛沒有時間精力教得好。這類大學應當停辦大學部學生教育。當然，他們不願意這樣做。他們想用大學部學生課程安插研究人員和研究生任教職，想由大學部學生所繳學費，或州政府所撥經費，用於支援研究。正是這種虧待大學部學生的措施，必需消除。這類大學為保留大學部所提任何理由（例如，給青年學生有機會接觸到『偉大』才智之士）都是假的。純以研究為導向的大學，像紐約市的洛克斐勒大學，就是很好的模式，有突出的研究能力，但只提供進修哲學博士的學位。

為使大學能教育大學部學生，又仍保持研究和訓練研究生，不是沒有辦法。避免占大學部學生便宜，用來嘉惠研究生，數學系，以及其他學系，教學和研究兩項任務（即大學部學生和研究生的訓練），行政和預算應該分開。大學部學生的學費只用於大學部學生，並且約聘人員擔任大學部學生的教學工作，不應由研究所主任核准。經費和權責分開，大學部就能約聘專任優良教師，而不用現在擔任極大部份教學工作的低薪而不成熟的研究生。任何剩餘經費可用來增加獎學金和設備。

主張將大學部和研究所的功能分開，似乎太激烈，其實是又回到老路。在十九世紀末的二十五年中，美國最初辦研究生訓練和研究時，研究生

的教授團原本是分開的，後來，哈佛校長艾略特於1890年，首先將兩部份的教授團合而為一。在當時，這是明智舉動，因為教學的教授團較弱，而研究人員較有能力作為高級課程的教師。經由和教師密切接觸，研究人員也獲得很多有益影響。

對今天的大學，再提議分開，並不是說這兩部份不應相互影響，或者兩個教授團要完全彼此隔離。明智的大學部系主任如若相信有助於大學部學生的教學計劃，就會請教並借重研究所的教授，而研究所主任也會同樣如此做。明智的院長更會建議並鼓勵這種合作。

研究人員反對研究所和大學部完全分開。其理由如次：第一，認為「好的研究所是提高學術和知識標準的最佳保證」。不過，這類標準如何對大學部發揮影響並未說清楚，研究教授根本對大學部活動不感興趣。只有一點是清楚的，即為方便研究所教授團，而忽視大學部學生（第五章）。第二，認為「好的研究所是吸引傑出教授的最佳辦法。教授團的力量有賴於創造力—有賴於做研究，撰寫論著以及和高級學生共同工作的機會。」可是，這些對大學部學生教學，又有什麼用？

接着就是廉價大贈品，就是，「第三，外界人士對大學的印象靠聲望，而大學的聲望大都靠研究所」。不過，大學研究工作的聲望，或者這種聲望造成的印象，對大學部教學究有什麼價值？如果這樣確能吸引良好的大學部學生，但又不給他們公平的對待，又如何解說？先吸引學生進來再將他們的一生弄糟？研究所的聲望將最好的大學部學生誘進陷阱，再發動機關，然後在他們掙扎逃生時，加以毀滅。我們能十分有把握的認定，越有聲望的大學，越少對教育關切，因此教育效果越差。可以肯定的說，只要研究仍然作為教授團價值的評判標準，對教學決不會有好處。

維持現狀仍然有其他理由。說是，研究所能「吸引優良教師」。假如意思是說，研究所的存在能為大學部吸引優良教師，事實已經否定這項爭論。好的研究所吸引的青年人，是想自己進行研究，這些人熱望成為有聲望的研究人員，不是偉大教師。並且，在大多數大學裡，他們也無法選擇，他們的未來唯有靠研究上的成就。

至於說大學部教授需要研究人員的支援、鼓勵和知識，也不確實。美國有些四年制學院教學最佳（等五章），這些學院的教授完全和研究教授分開。某一大學（最有聲望的大學之一）有一位教授最近曾推崇有極佳教學成就的四年制學院。在談到他自己的學校時，他說「希望大學部學生認為這裡是安赫斯特（Amherst College美國著名的學院），研究生認為這裡是耶魯（Yale）」。大學裡如有獨立的大學部應當不會有害處。

研究教授反對大學將研究所和大學部各學院分開，完全出於自私。十九世紀政治上的殖民主義，變成了教育的殖民主義，研究所吃大學部，正像狼吃羊一樣吃定了。

如若不許研究所動用大學部經費，將如何維持下去？答案是，減少研究教授的人數、增加數學鐘點、限制研究人員競爭高薪、解聘那些號稱教授、但除大名之外別無貢獻的人。在輔助人員和維護場所方面，也能省下錢。間接的收穫也很可觀，少出版華而不實或無足輕重的論文，真正有價值的論文就會站到前面來。此外，由於現在各種領域內的雜誌種數太多，使得圖書館的場地和經費都感不足，減少雜誌的篇幅大小以及數目，可以節省圖書館用費。這類費用很大，以致由某些重要基金會資助的最近一項研究（見1975年六月二十二日紐約時報），現正尋求一項新方法來保存和傳播研究結果，以消除雜誌。

研究及研究生的教學，在1876年非常需要。在1976年，這兩者均應重加檢討。應有較多不同類別的研究生訓練計劃，但研究生的學位總數，在目前和預見的將來可以減少。關於大學部註冊人數的預測，一致認為將趨向減少。甚至現在各大學已在爭取學生，當學院的註冊人數降落時，這種競爭將更劇烈。從長期來看，教育的品質是最佳的吸引力量。玫瑰色聲望的氣泡包裹着許多學校，看起來很誘人，但自然會被刺穿而破裂。總之，犧牲大學部以嘉惠研究生的行爲，無法再予容忍。

大學部和研究所的功能分開，另有積極價值。現在，大學部進行的活動——課程開設的決定，教師的選擇（不論用研究生或成熟的教師），教科書的採用，以及教學時間的安排——都由系主任交由一位行政助理去辦。

大學部教育低劣的結果，系主任並不煩憂，因爲知道他的成績要由研究活動來評定。另一方面，如若大學部的系主任，選擇得人又是自己運用職權，一定能找到優良教師。教師終於在大學裡有了地位，也會有錢付其應得的報酬。研究所跟着會認清他們的存在一部份要靠能爲研究生找到職位，也就不得不引進一種實際是訓練教師的博士訓練計劃。

當然，將兩部分的行政和預算分開，也有不利甚至危險。摩擦、爭取經費和設備，甚至發展爲對立。老實說，兩害相權取其輕，如若能公平對待數以百萬計的大學部學生，又能間接有利於研究生的教學和研究，雖有輕害，應如何選擇，已很明顯。

甚至政府干涉迫使改進，也並非不可能。幾十年來，有聲望的大學大多數在種族和宗教上不免有歧視行爲，現在聯邦法規已迫使消除這類以及其他不公平的做法。哈佛校長波克在監事會1972—73年報中說明，已暗示進一步政府行動的可能性：「如若大學接受聯邦的巨額研究和教學補助，政府官員就不能不注意納稅人的錢如何用掉」。州教育廳對強制執行品質標準不免鬆弛，但已有報紙評論要求嚴加處理。

美國最好考慮另外的措施。小學教師已往在所謂師範學校，中學教師在專爲訓練教師的學院，接受訓練。這兩類學校實在很差。這由於美國當時所有各級教育和知識都差。到1960年，師範學校和教育學院改變爲文理學院，通常還有研究生和研究訓練計劃。爲了後面一部份計劃能趕上大規模的大學，也徵聘以學科爲導向以及爲各專門圈認可的人成立教授團。教師的教育就因之而被犧牲。現在，未來的教師可以進入這些改變後的學院，或者各大學的文理學院，安然接受不知道學生特殊需要的典型博士或研研究生施教。現在似乎可以反轉歷史，重建四年制學院，專爲訓練教師。這樣的學院，今天能夠要求和率得博學的專心於教師教育教授團。或許這項措施的明智，從工程學院現況看得更清楚。工程學院必需和文學院分開，因爲工程學生要修習許多技術科目。雖然如此，大多數大學所有的數學課程都由文理學科教授任教。由於他們對工程師最好學那些數學既不知道，也不關心，因之，如前文所述（第七章），大規模大學的許多工程學院自

已提供數學課程，不願學生修習傳統數學系提供的課程。雖然正確的未來學校教師教育，比未來工程師較接近於文理學科，不過，還是有許多特點需要特別適合的教授任教。

從1960年代發生的事件，更應強調需要瞭解特點的教師。學院的教授應當明白學生在中學學到些什麼。訓練未來中學教師的教授更應知道這些教師將來確實要面對的問題是些什麼。在1960年代，中學教的最普遍教材是「新數學」。當新數學作為話題，開始在教授談論中提起時，即使專校大學部的教師也在問，什麼是新數學？不論好壞，中學教師不得不教新數學。當然，訓練未來中學教師的學院教授自應充分知道這種課程。實在說，許多為新數學失敗作辯護的人，並未歸咎於其內容，認為實際是由於沒有為教師作教學前的準備，這種辯解不無道理。

由於大學本身未曾主動負起滿足大多數學生的需要，因此，有人想藉其他機構對大學施加壓力。最有聲望的這種機構，無疑的是「國家科學研究院」。該院當然應該關切全國科學的健全。但是，這一機構最重要的工作，顯然是選擇院士——或者還像一位院士所說，讓已經是院士的人煩厭，令還不是院士的人困窘。對該院能期望什麼？從選舉過程本身可能透露一些消息。選舉的第一步是由一位院士提名，誰是一位院士所熟悉的？最可能的是他同行共事的人。他偏愛這類人，因為同行共事的人受到尊榮，也暗示他自己的尊榮。反過來看，在研究方面的對手，當然不值得給與尊榮。至於提名候選人的選舉，實際是一項政治交易的商談。由於院士來自許多高度專門化的不同領域，實在難於判定對大多數候選人投贊成或反對票。由許多偏見作成了決定。分別在數學和物理領域享譽的兩位院士，維納及費英曼（Richard Feynman），在目睹這樣的選舉後，就藉故請辭。拓樸學者施邁耳（Stephen Smale）在第一次出席院會後，就不客氣的說：「從過去幾天所見，美國一群最著名的科學家集會一起，注意的只是如何增加院士人數及紀念已故院士的方式，何以會如此？真是奇怪。」選舉的結果在使小圈子本身能永久存在。證據是院士裡從來沒有工程師、醫學人員或社會科學家。直到十年前，久經抗議，該院才決定從上述領域中

選出院士。值得注意的一件事，即在1950到1973年間，有十二位得到諾貝爾獎的美國科學家——有些實在是理所當得——在得獎時並非院士。就整體來看，院士多屬研究人員，缺少遠大眼光，所以不能期望他們有助於教學問題。不過，還可以期望院士關心研究的大量浪費以及出版物泛濫帶來的禍害。但是，該院對這些問題也一無所爲。

間或，有些院士發起一次活動，組成一個委員會，進行一項特定功能。在1960年代後期，當時美國政府仍對數學研究大量資助金錢，但該院感到不滿，認爲還不夠多。於是組設「支援數學科學研究委員會」。這一委員會決定增加支援的最佳理由，是說美國爲了學院和大學教學需要更多的博士。可是，即使在1965年左右，對未來學院學生人數的獨立調查，都估測學院學生人數在1970年左右即將穩定，稍後將會降低。這類估測確屬可信，因爲後二十年內達到進入學院年齡的兒童人數已經確定，而高中學生升入學院的人數比例，在幾十年裡不會有顯着改變。此外，數學系產生的哲學博士人數已經大增。事實上，當時「美國教育協會」負責人卡特爾（Allan Cartter）博士，就警告學術界，在1960年代中期繁榮年頭，博士的供給已經過量。還有人說，甚至在1961年就已顯示這樣情形。

雖然如此，上述委員會發表的數字，說是在1970年代哲學博士將大量短缺。這一委員會建議，比照前一年每年應增加二百位數學博士，並從1968年起繼續五年。由於學生相信這一說法，認爲將來能獲得職位，使得數學博士的人數，從1968年的970人增至1972年的1281。後來，由於無法找到職業，學生失去進入這一領域的勇氣，人數隨即開始降低。正像一篇論著中所說，1974年夏季的好消息，是博士失業人數不比1973年更壞。

該委員會不僅沒有做好事前的作業，從1960年代情況做如意算盤的外延推測，只不過爲了替多得研究經費作辯護。結果正如一位名教授的評述：這項報告只是宣傳文件，沒有冷靜研究的依據。委員會做出這樣事情，不過視爲國家科學研究院的一項活動而認爲這種「錯失」只是小事一件。但是，那些受鼓勵進修博士希望能任學院教師的青年，現正在街頭徘徊，他們恐怕不會如此寬宏大量。

另一機構能對不受約束、品質不良的研究，以及研究生計劃，有重大影響力的是美國數學會。學會成立於1894年，旨在專心致力於教學、著述、研究以及會員認為適當的工作（第二章）。適合各種程度的著作都公開加以推荐。學會特別將本身說成是教師的組織：「任何將學會功能限制於研究和出版刊物的路線，爲了種種審慎而明智的理由，都應予以抗拒」。當時，美國在研究方面尚屬幼稚時期。到了研究越來越積極，學會注意力就越來越轉到這一方向，開始頌揚研究，認爲是學院教授唯一重要的活動。

有人期望學會既然注意良好的研究以及傳播知識進入教室，學會本身自應關切教學和闡釋性的著述。對過度專門化、拙劣研究論文的泛濫、純粹和應用數學間的不平衡以及數學不斷增加的孤立，應加反對。但是這些壞處，竟然沒有一樣被認真處理。

美國數學會如若採取措施幫助教學、制止過度和浪費的出版物、減低對青年博士要求出版的不人道壓力，應該審慎考慮。一項極端的措施，但看來似乎利多弊少，即禁止得到哲學博士僅兩三年的人，在雜誌上刊出論文。這樣做，不僅使青年教授可以調整自己適應教學，也可以消除許多無甚價值的論文，不像現在雜誌那樣泛濫。此外，也迫使行政主管認真去評核一個人，而不只是數出版物。

當然，學會應主張一項更明智的約聘政策。代替現在普遍通用的三年約聘制度，新博士的約聘不加時間限制，只有一項諒解，正如「美國大學教授聯會」所建議的，即服務七年一定要能獲得永久教職，如若不能給與永久教職，則在第六年底應先通知。至於明顯不適合工作的人應即行解聘，因爲約聘法定是以一年爲基礎。一位青年教師曉得至少有六年時間使自己適應教授職務，也就能抽出時間去認清自己的天生興趣與性向，究竟比較喜歡從事教學，還是爲了研究建立更好的知識背景，或者決定他對大學能做的重大貢獻是什麼？新博士也需要時間，在心理上彌補取得博士學位的辛勞。大學也將有更多時間來評核他的實在能力。如若必需對服務五或六年的教師終止約聘，這些教師通常仍在三十歲左右，仍然少壯，能夠找到另外的位置。事實上，有機會自我檢討，他能就最配合自己性格的事業



，找到更適合的約聘。

數學會也能揭露其他不良行爲，例如，要求大學行政主管更爲正直。今天許多系，約聘十多位新博士以三年爲期，明知道得到永久教職的機會不會多過一或二人。這些約聘都未經審慎的甄選。這種多重約聘的原因，說是讓新手有三年期間觀察，最好的才留下來。不過，這項政策的真正理由，是大學可以自誇有大量研究導向的博士，但所付只是正教授薪水的三分之一。

學會還應關心出版物的品質。由於論文審核現在幾乎是沒有辦法解決的問題（第三章），學會可以堅持投給雜誌的論文應清晰可讀，至少這樣可以決定其正確無誤。大多數作者的寫作似乎只關心受人讚譽與否，而不是讓人了解。一篇論文的整個價值，或許較難決定，不過這種判斷也能變得比較容易，如若要求每位作者至少照着他自己的意見，說明其論文的貢獻—科學的應用，美學價值，或智力的興趣。對上述要求最可能的反對理由是：大多數雜誌需要更多的篇幅，而雜誌的篇幅很寶貴。但是上述要求的結果，會消除很多現在刊出的不正確、缺乏價值和重複的論文。所以抵消的結果，反而節省篇幅，又使讀者較易決定一篇論文是否和他的興趣有關。像現在這樣沒有約束的泛濫，反而是好論文被壞論文淹沒。

另外還有一個組織，美國數學協會（M. A. A.），他們明白宣稱致力於促進對大學部學生教育的關心。這一組織自應爲過份強調研究、教學處於低地位、研究生缺少將來從事教學的訓練、以及利用數學助教施教種種弊病而奮鬥。事實上，協會是由美國數學會中一群人所創設，他們在1915年已看出學會開始忽視教學而偏愛研究。可是，協會在其範圍內的工作並不比學會在研究方面的更爲有效，除了維持現狀外，難有更多期望。

這兩個組織都設置各種委員會，對當前問題提出報告，並力主成立更多的委員會且收集資訊。近幾年，關於訓練數學家需要採取多種計劃的問題，在小組討論會裡，以及在兩組織的期刊裡，都有文章加以強調。最近設置的一個委員會，相當具有嘲弄性的一個組織，其名稱爲「如何應付 M. A. A.」(Mathematical Avoidance and Anxiety 數學的逃避和焦慮)

。詳細考查他們的談話和文章，立即發覺促請改革的根本原因是：爲幫助博士找工作。例如，博士急速擴展的一個可能市場，就是兩年制學院。因此，小組討論會以及期刊中的文章，所講的都是「這些學院確有需要」這類的話。工業界也需要數學家，所以常推荐應用數學，以使爲這類職業作準備。

當然，今天的大學教授對初級學院和工業界的需要和問題所提意見，幾屬無用。他們中很少有人在這兩領域裡曾有經驗，所以也就不知道這些機構用人的條件。他們的意見所表現的虔誠心情，完全由於職位短缺所促發。至於大多數大學的過分強調研究、博士的偏狹訓練及不幸的大學部教學，都全不加以指責。

這類文章和講詞似乎想用阿司匹林來治重病，沒有採取具體有效的措施。事實上，這兩個組織的許多會員，在各大學系裡均有影響力，有些還是系主任。但是，在他們各自的學校中，對擴展研究生教育的性質或目標，或者對保障和留住學者和教師，却一無所爲。研究是法定的貨幣，最奇怪的，這些系主任中，有些人由於不做研究，就謀求行政位置。雖然，現在有很少數系主任贊成論文範圍可以比較擴大，包括解說論文，不必爲原創性研究。但在現時環境裡，撰寫這類論文的人，找到職業的機會實際是零。有一位系主任說得很慷慨，他要約聘這類的人以兩年爲期。當然，超過這一期間，不會再留下那些人的。

另一個組織，「全國數學教師協會」，值得一談。協會關切的是中小學校教育。在這方面比上述兩個組織有效得多。中小學教師沒有時間和機會去發展和試驗新觀念、新教學技術以及新傳播媒體。經由期刊、會議和講習會，協會確能在內容和方法上提供指導。不過，有些領導人士容易受騙。在1961年，新數學尚未接受任何慎重試驗之前，協會就印發一本小冊子，「學校的數學革命」，內中不僅擁護新數學，還怪罪那些未採用的學校怠忽職責。

此外，協會應當代表所有會員的看法，但是往往並非如此。例如，在新數學全盛時期，協會的期刊，「數學教師」，不能避免刊出指責新數學

的論著，所以就用下述方式來處理：當提出批判的一位演講人，受邀在某項會議發表主要演說後將講詞送請刊載時，編輯人員自然不敢退回，但是他們一定會在同一期內登出一篇反駁者的文章。顯然，編輯人員希望避免讓新數學的批評影響到會員。至於「美國數學協會」的官方期刊，「美國數學月刊」，大多數編輯人員也會退回批評現有教育作法的文章。

這些組織的缺點，原因很容易解釋。在這些組織裡居於領導地位，給他們帶來了聲名，人望以及（間接的）在自己的大學、學院或其他機構裡的晉升。因此，這類位置自為專業會員所追求。如何能在組織裡得到高級職位？過程和政界的情形並無不同。會長派定各重要委員會人員，其中有一個委員會負責提名未來高級職務人員和期刊編輯人選。這些委員會當然由圈內人所組成，再由他們挑選人員組設次要的各種委員會。熱望獲得職務的人，先要設法認識一些著名會員，如果機緣巧合就能在次要的委員會裡服務。這些著名會員通常已經位於各重要委員會，在選人的時候，面對上千不認識的會員姓名，認識的這位就顯得突出，自會被選上。如再能和大多數會員相處友好，並繼續和著名會員結交，這個人就成為越來越重要的角色，在會務上時時露面，幾乎一定位置越升越高。最後，組織散發給會員的選票，將這位「空白」先生（Mr. Blank）作為唯一的會長候選人。「空白」先生當然被選上，領導地位就這樣永久延續下去。

庸才以及權力和聲望的追求者，能夠升到全國性組織的會長地位，看來似乎難以相信，可是只要想一想，某些人還當上美國的總統呢！

偶然也有一位卓越的研究人員，由於其貢獻而被選任這類組織的會長以示尊榮。不過，這樣的會長極少對數學界問題深切關懷，即使關懷也很少有行政能力促使其實現。事實上，大多數會長享受着辦公室裡的陽光即深感滿足，在一或兩年任期內循例辦事。尚有一點補充，即他們為了本身利益，並未辭去大學裡的正式職務，因此不能將很多時間精力用到組織的工作上。

不過，在上述組織裡，也能夠發現真誠、深思且不乏幹勁很足的人，若他們偶或出頭，將使他們的委員會把握住研究和教學的真正問題，自

然大有助於問題的解決。這種情形並非沒有一一但極為罕見。

上述建議自不能解決所有的數學教育問題。我們還必需對兒童如何學習，以及是什麼引起不同年齡青少年的動機等方面知道更多。我們必需設計和運用更多的教學輔助器材。但是，這些方法需要更多的研究，不像上面所述的建議，可以立即運用。

需要改革不僅爲了改進數學教育。保留在課程表內的數學以及研究的生存，兩者現均瀕於危險。集中於純粹奧秘的研究，最終使得社會減低資助，將像柯倫特前曾預測：所有重要的數學將由物理學家、工程師、社會科學家、企業管理學院來創造。不良的教育趕走了學生，學生越少也就是數學家的職位越少。數學教育的需求在1930年代顯著降低，實屬咎由自取，只靠了二次世界大戰才得復活。很難希望這樣的解救方法，再來一次。

雖然各種改革尚待採行，我們也不必對教育系統太過失望。從早期的困難來看，各種缺失不無可恕之處。當美國的技術、國力和對世界影響日見增長，就尋求能和這些力量相比配的科學力量。美國成爲渴望科學地位的暴發戶，樣仿已有最好研究成果的西歐各國，熱切想和他們居於平等地位，因而忽略了一項美國真正值得誇耀和讚揚的大原則：不像歐洲各國，美國在歷史初期就誓言要普及教育，將免費或低學費教育的層次越提越高。一方面負起建立並增進普及教育的使命，而又同時力求在研究方面和西歐各國並駕齊驅，甚至居於領導地位，這超出了美國資源能力負擔之外。美國得到了領導地位，但以所有學生教育的品質作爲代價。

現在是數學家擺脫自我陶醉、擴大自己的眼光和興趣、將研究限於有價值論文的時候了。藉以將時間和精力用在多方面教育的需要和任務上，他們應配合所有學生的興趣，大學部學生和研究生都一視同仁。只有認清研究、做學問和教學相互依賴的關係，才能推展數學本身、改善教學，並且促進數學在社會上無數有價值的用處。



## 附錄：參考書目

- Alder, Henry L. "Mathematics for Liberal Arts Students." *The American Mathematical Monthly* 72 (1965), 60-66.
- Allendoerfer, C. B. "The Narrow Mathematician." *The American Mathematical Monthly* 69 (1962), 461-69.
- Ashby, Eric. *Adapting Universities to a Technological Society*. San Francisco: Jossey-Bass, Inc., 1974.
- Axelrod, Joseph. *The University Teacher as Artist*. San Francisco: Jossey-Bass, Inc., 1973.
- Baker, Liva. *I'm Radcliffe! Fly Me! The Seven Sisters and the Failure of Women's Education*. New York: Macmillan, 1976.
- Barzun, Jacques. "The Cults of 'Research' and 'Creativity'." *Harper's Magazine*, October 1960, 69-74.
- \_\_\_\_\_. *Teacher in America*. New York: Doubleday and Co., 1954.
- \_\_\_\_\_. *The House of Intellect*. New York: Harper and Bros., 1959.
- \_\_\_\_\_. *The American University*. New York: Harper and Row, 1968.
- Bell, Eric T. Review of *The Poetry of Mathematics and Other Essays*. *The American Mathematical Monthly* 42 (1935), 558-62.
- Berelson, Bernard. *Graduate Education in the United States*. New York: McGraw-Hill, 1960.
- Bidwell, James K., and Clason, Robert G. *Readings in the History of Mathematics Education*. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 1970.
- Blanshard, Brand, ed. *Education in the Age of Science*. New York: Basic Books, 1959.
- Boffey, Philip. *The Brain Bank of America*. New York: McGraw-Hill, 1975.
- Bylinsky, Gene. "Big Science Struggles with the Problems of its own Success." *Fortune*, July 1977, 61-69.
- Caplow, Theodore, and McGee, Reece J. *The Academic Marketplace*. New York: Basic Books, 1958.
- Carnegie Commission on Higher Education. *Less Time, More Options*. New York: McGraw-Hill, 1971.

- Carnegie Foundation for the Advancement of Teaching. *More Than Survival*. San Francisco: Jossey-Bass, 1975.
- Carrier, George F., et al. "Applied Mathematics: What Is Needed in Research and Education." *SIAM Review* 4 (1962), 297-320.
- Cole, Jonathan R., and Cole, Stephen. *Social Stratification in Science*. Chicago: University of Chicago Press, 1973.
- Conference Board of the Mathematical Sciences. *Overview and Analysis of School Mathematics, Grades K - 12*. Washington, D.C.: 1975.
- \_\_\_\_\_. The Nacome Report. *Undergraduate Mathematical Sciences in Universities, Four-Year Colleges and Two-Year Colleges*, 1975-76. Washington, D.C.: 1976.
- Duren, W. L. Jr. "Are There Too Many Ph.D.'s in Mathematics?" *The American Mathematical Monthly* 77 (1970), 641-46.
- Eble, Kenneth E. *Professors as Teachers*. San Francisco: Jossey-Bass, 1974.
- Educational Testing Service. *Scholarship For Society*. Princeton, N.J.: Educational Testing Service, 1973.
- \_\_\_\_\_. *A Survey of Mathematical Education*. Princeton, N.J.: Educational Testing Service, 1956.
- Eliot, Charles W. *A Turning Point in Higher Education*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1969.
- Federal Security Agency, Office of Education. *Toward Better College Teaching*, Bulletin #13. Washington, D.C.: U.S. Government Printing Office, 1950.
- Freudenthal, Hans. *Mathematics as an Educational Task*. Boston: Reidel Publishing Co., 1973.
- Gaff, Jerry G. *Toward Faculty Renewal*. San Francisco: Jossey-Bass, 1975.
- Gaston, Jerry. *Originality and Competition in Science*. Chicago: University of Chicago Press, 1973.
- Glenny, Lyman A., et al. *Presidents Confront Reality, From*

- Curricula*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1974.
- Hayes, John R. "Research, Teaching and Faculty Fate." *Science* 172 (1971), 227-30.
- Edifice Complex to University Without Walls*. San Francisco: Jossey-Bass, 1975.
- Griffiths, H.B., and Howson, A.G. *Mathematics: Society and*
- Henderson, Algo D., and Jean Glidden. *Higher Education in America*. San Francisco: Jossey-Bass, 1974.
- Henrici, Peter. "Reflections of a Teacher of Applied Mathematics." *Quarterly of Applied Mathematics* 30 (1972/73), 31-39.
- Henry, David D. *Challenges Past; Challenges Present*. San Francisco: Jossey-Bass, 1975.
- Herstein, I.N. "On the Ph.D. in Mathematics." *The American Mathematical Monthly* 76 (1969), 818-24.
- Highet, Gilbert. *The Art of Teaching*. New York: Vintage Books, 1955.
- Hohenberg, John. *The Pulitzer Prizes*. New York: Columbia University Press, 1976.
- Howson, A.G., ed. *Developments in Mathematical Education*. New York: Cambridge University Press, 1973.
- Hutchins, Robert M. *The Higher Learning in America*. New Haven: Yale University Press, 1936.
- Jencks, Christopher, and Riesman, David. *The Academic Revolution*. New York: Doubleday and Co., 1968.
- Kendall, Elaine. *An Informal History of the Seven Sister Colleges*. New York: G.R. Putnam's Sons, 1976.
- Klamkin, Murray S. "On the Ideal Role of an Industrial Mathematician and Its Educational Implications." *The American Mathematical Monthly* 78 (1971), 53-76.
- Kline, Morris. "Freshman Mathematics as an Integral Part of Western Culture." *The American Mathematical Monthly* 61 (1954), 295-306.



- \_\_\_\_\_. "Mathematical Texts and Teachers, A Tirade." *The Mathematics Teacher* 49 (1956), 162-72.
- \_\_\_\_\_. *Mathematics in Western Culture*. New York: Oxford University Press, 1953.
- \_\_\_\_\_. *Mathematics and the Physical World*. New York: T.Y. Crowell Co., 1959.
- \_\_\_\_\_. "A Proposal For the High School Mathematics Curriculum." *The Mathematics Teacher* 59 (1966), 322-30.
- \_\_\_\_\_. "Intellectuals and the Schools: A Case History." *Harvard Educational Review* 36 (1966), 505-11.
- \_\_\_\_\_. *Mathematics For Liberal Arts*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1967.
- \_\_\_\_\_. "Logic Versus Pedagogy." *The American Mathematical Monthly* 77 (1970), 264-82.
- \_\_\_\_\_. *Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Math*. New York: St. Martin's Press, 1973.
- Langer, Rudolf E. "The Things I Should Have Done, I Did Not Do." *The American Mathematical Monthly* 59 (1952), 443-48.
- Levine, Arthur, and Weingart, John. *Reform of Undergraduate Education*. San Francisco: Jossey-Bass, 1973.
- Lewis, Lionel S. *Scaling the Ivory Tower*. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 1975.
- Livesey, Herbert. *The Professors*. New York: Charterhouse, 1975.
- Lyons, Gene. "The Higher Illiteracy." *Harper's Magazine*, September 1976, 33-40.
- Martin, Everett Dean. *The Meaning of a Liberal Education*. Garden City Publishing Co., 1926.
- Mathematical Education in the Americas*. Teachers College, Columbia University, New York: 1962.
- Merton, Robert K. *The Sociology of Science*. Chicago: University of Chicago Press, 1973.
- Miller, Richard I. *Developing Programs For Faculty Evaluation*, San Francisco: Jossey-Bass, 1974.
- \_\_\_\_\_. *Evaluating Faculty Performance*. San Francisco: Jossey-Bass, 1972.

- Milton, Ohmer. *Alternatives to the Traditional: How Professors Teach and How Students Learn*. San Francisco: Jossey-Bass, 1972.
- National Science Board. *Graduate Education, Parameters For Public Policy*. Washington, D.C.: U.S. Government Printing Office, 1969.
- Nevanlinna, Rolf. "Reform in Teaching Mathematics." *The American Mathematical Monthly* 73 (1966), 451-64.
- Newsom, Carroll V. "The Image of the Mathematician." *The American Mathematical Monthly* 79 (1972), 878-82.
- Nisbet, Robert B. *The Degradation of the Academic Dogma, The University in America, 1945-1970*. New York: Basic Books, 1971.
- Northrop, E.P. "Mathematics in a Liberal Education." *The American Mathematical Monthly* 52 (1945), 132-37.
- Ohmann, Richard. *English in America*. New York: Oxford University Press, 1976.
- Paige, L.J. "Public Understanding of Science and Its Implications For Mathematics." *The American Mathematical Monthly* 78 (1971), 130-42.
- Parker, Gail Thain. "While Alma Mater Burns." *The Atlantic Monthly*, September 1976, 39-47.
- Peterson, R.B. "Survival for Mathematicians or Mathematics." *The American Mathematical Monthly* 79 (1972), 70-76.
- Rogers, Hartley, Jr. "The Future of the University in Mathematics Education." *The American Mathematical Monthly* 82 (1975), 211-18.
- Rudolf, F. *The American College and University*. New York: Knopf, 1968.
- Stone, Marshall: "Mathematics and the Future of Science." *Bulletin of the American Mathematical Society*. 63 (1957), 61-76.
- \_\_\_\_\_. "The Revolution in Mathematics." *The American Mathematical Monthly* 68 (1961), 715-34.
- Ulich, Robert, ed. *Three Thousand Years of Educational Wisdom*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1954.

- von Neumann, John: "The Mathematician" in R. B. Heywood: *The Works of the Mind*, University of Chicago Press, 1947, 180-196; also in J. R. Newman: *The World of Mathematics*, Vol. 4, 2053-2063, Simon & Schuster, 1956.
- Weinberg, Alvin M. "But Is the Teacher Also a Citizen?" *Science* 149 (1965), 601-6.
- . *Reflections on Big Science*. Cambridge, Mass.: M.I.T. Press, 1967.
- Weyl, Hermann: "A Half-Century of Mathematics." *The American Mathematical Monthly*, 58 (1951), 523-553.
- Whitehead, Alfred North. *Science and the Modern World*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1926.
- . *Essays in Science and Philosophy*. New York: Philosophical Library, 1948.
- . *The Aims of Education and Other Essays*. New York: Macmillan, 1929.
- Willcox, A.B. "England was Lost on the Playing Fields of Eton." *The American Mathematical Monthly* 80 (1973), 25-40.
- Wilson, Logan. *The Academic Man*. New York: Oxford University Press, 1942.
- Wilson, Robert C., et. al. *College Professors and Their Impact on Students*. New York: John Wiley and Sons, 1974.